کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: اقتصادي رياضي

څانګه: بانکداري او د تجارت اقتصاد

مولف: محمد دهقانمل

ژباړن: محب الرحمن محب

د څار کمېټه:

- محمد آصف ننګ د تخنيکي او مسلکي زده کړو معين
- ديپلوم انجنير عبدالله کوزابي د تعليمي نصاب رييس
- محمد اشرف وحدت په تعليمي نصاب کې د معينيت د مقام سلاکار

د تصحيح کمېټه:

- عبدالجميل ممتاز
- محب الله محب
- احمد فهيم سپين غر

د ګرافيک او ډيزاين څانګې مسئول : محمد جان عليرضايي

ګرافيک او ډيزاين: محمد سليم خان

چاپ کال: ۱۳۹۲ لمريز کال

تيراژ: ۱۵۰۰

چاپ ځل: لومړی

وېب پاڼه: www.dmtvet.gov.af

برېښناليک: info@dmtvet.gov.af

کډ ISBN: ۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۶۱۳

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د توري
هر بچی يې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو

ور سره عرب، ګوجر دي
پاميريان، نورستانيان

براهوي دي، قزلباش دي
هم ايماق، هم پشه يان

دا هېواد به تل ځلېږي
لکه لمر پر شنه آسمان

په سينه کې د آسيا به
لکه زړه وي جاويدان

نوم د حق مو دی رهبر
وايو الله اکبر وايو الله اکبر

د پوهنې وزیر پیغام

ګرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د یوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغې ټولنې د پیاوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زیار پورې تړلې دي. همدا بشري قوه او کاري متې دي چې د هیواد انکشافي اهدافو ته د رسیدو لارې چارې طی کوي او د یوه نیکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمینوي.

انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د یوه سوکاله ژوند د اسبابو او ایجاباتو د تکمیل لپاره خپل اغیزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځایه ده چې د یوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپیریال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هیڅ حالت کې نه نفی کیږي او نه هم منقطع کیږي.

په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت مسوولیت او مکلفیت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانینو ته په ژمنتیا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چابکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپیڅلي هدف ته د رسیدو په خاطر د انساني ظرفیت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنیکي کادرونو روزنه او پراختیا یو اړین مقصد دی. همدا په تخنیکي او مسلکي زده کړو مزین تنکي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سیستماتیک ډول د هیواد انکشاف محقق او میسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تګ لاره، دولتداري او ټولنیز نظام د اسلام له سپیڅلو احکامو څخه الهام اخیستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي باید په علمي معیارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړیتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفیت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربیت او په سوچه اسلامي روحیې د هغوی پالنه نه یوازي پخپل ذات کې یوه اساسي وجیبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه یې وژغوري او د نورو له سیاسي او اقتصادي احتیاج څخه یې آزاد کړي.

زموږ ګران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربیون باید په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نیکمرغه افغانستان ارمان، یوازې او یوازې د دوی په پیاوړو متو، ویښ احساس او نه ستړي کېدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنیکي زده کړو له امله کیدای شي په ډېرو برخو کې د افغانستان انکشافي اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو لیکوالانو، مولفینو، ژباړونکو، سموونکو او تدقیق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهیر کې د ټولو کورنیو او بهرنیو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومي مننه کوم. له درنو او پیاوړو استادانو څخه رجامندانه هیله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدریس او فعاله تدریب سره دې د زړه په ټول خلوص، صمیمي هڅو او وجداني پیکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي.
د نیکمرغه، مرفه، پرمختللي او ویاړمن افغانستان په هیله

فاروق وردګ
د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

لړلیک

مقدمه

د اقتصادي رياضي دا درسي کتاب چې د ټاکلي پروګرام سره سم يې د يوه منطقي تشکيل له مخې مفردات په پام کې نيول شوي، د ادارې او حسابدارۍ د انستيتيوت د محصيلينو د تعليمي سويې په لوړولو کې خورا مهم ګټل کېداى شي.

د اقتصادي رياضي دغه کتاب د اقتصادي رياضي د مضمون د تدريس له مخې د اقتصاد، سوداګرۍ، بانکدارۍ او منجمنټ لپاره تيار شوى دى.

دغه کتاب په لنډ او شنلي ډول تيار او ترتيب شوى؛ څو لوستونکي وکولاى شي په کم وخت کې ترې اغېزمنه ګټه پورته کړي. زياتره موضوعات چې په دې کتاب کې ځاى پر ځاى شوي دي، کولاى شي په ډېرو اقتصادي مسايلو، صنعت، توليد، د نفوس ډېر والي او نورو مواردو کې د ګټې اخستنې وړ واوسي.

دا کتاب د ادارې او حسابدارۍ پر انستيتيوت سربېره د ټولو هغو انستيتيوتونو لپاره، چې په محاسبې، اقتصاد او سوداګرۍ، بانکدارۍ، منجمنټ او نورو څانګو کې فعاليت کوي، ګټور دى او کيداى شي د محصلينو او نورو ټولو مينه والو د ګټې وړ وګرځي.

په پاى کې د دې کتاب له ټولو مينه والو هيله کوم چې خپل نظريات د کتاب د ښه والي او د نيمګړتياوو د له منځه وړلو لپاره راسره شريک کړي.

په درنښت

استاد محمد «دهقانمل»

د کتاب لنډیزه موخه:

د محاسبې په چارو کې د لازمو او د اړتیا وړ مهارتونو لاسته راوړل، د اقتصادي ریاضي د اصولو، اصطلاحاتو او قواعدو سره سم د ریاضي د مسایلو حل، په تولید، صنعت، احصایې او نورو برخو کې د دې کارول او ورسره د انسانانو ورځنی تکامل، پرمختګ او د ژوند په چارو کې له اقتصادي ریاضي نه ګټه اخیستل.

لومړی څپرکی

په اقتصادي رياضي کې مفاهيم او اصطلاحات
د حقيقي عددونو سيستم

ټوليزه موخه:
لوستونکي بايد په کلي توګه په هغو اصولو، قواعدو او اصطلاحاتو باندې پوه شي چې په اقتصادي رياضي کې کارول کېږي او د رياضي د قواعدو او اصولو په واسطه اړوندې پوښتنې محاسبه او حل کړي.

د زدکړې موخې: لوستونکي بايد وکولای شي په اقتصادي رياضي کې په سمه او اساسي توګه د اصطلاحاتو مفهوم درک کړي او د هغې په قواعدو پوه شي.

١- د طاقت په تعريف او د هغې په قواعدو په سمه توګه پوه او پوښتنې، د طاقت له قواعدو سره سمې حل کړي.

٢- فکتوريل تعريف او د فکتوريل په طريقه پوښتنې په اسانۍ حل کړي.

٣- جذرونه او د جذر قواعد په سمه توګه زده کړي او اړوندې پوښتنې حل کړي.

٤- کسر، د کسرونو ډولونه او د هغو قواعد زده کړي او د کسر اړوندې پوښتنې سمې محاسبه او حل کړي.

طبعي عددونه: د ورځنيو ستونزو د حل لپاره ساده ترين عددونه، لکه ......١،٢،٣،۴ طبعي عددونه بلل کېږي $N=\{1,2,3,4,5\}$ طبعي عددونه د مثبتو تامو عددونو په نام يادېږي، چې په لاندې ډول طبقه بندي کېږي:

د يوويزو طبقه، 10^3 د زرګونو طبقه، 10^6د ميليونونو طبقه، 10^9د تيلونونو طبقه، 10^{12}د تريلونونو طبقه، 10^{15} د ګوادرليونونو طبقه، 10^{18} دکووسيسنليونونو طبقه، 10^{21}د سيلکسيتليونونو طبقه، 10^{24} د سيسليونونو طبقه، 10^{27} د اوکيتلونونو طبقه، 10^{30} د نونيلونونو طبقه او 10^{100} د ګوګولونو طبقه.

کامل عددونه: د (۰) په ګډون ټولو طبعي اعدادو ته کامل عددونه ویل کېږي
N={0,1,2,3,4,5}

تام عددونه: کامل عددونه او تام منفي عددونه له تامو عددونو څخه عبارت دي.

Z= {0 ± 1 ± 2 ± 3 ± 4 ± 5 ± ….}   یا Z= {+0+1+2+3+4+5…..}

Z= {-0-1-2-3-4-5………..}

ناطق نسبتي عددونه: هغه عددونه چې د دوو تامو اعدادو د نسبت په بڼه وړاندې شي، نسبتي عددونه بلل کېږي. د جمع، ضرب، تقسیم او منفي څلورګونې عملیې په نسبتي اعدادو پورې اړوندې دي.

که X,Y دوه نسبتي عددونه وي X+Y، X/Y X×Y, X-Y نو د تقسیم پرمهال باید مخرج صفر نه وي او موږ کولای شو X اوY ته هر (مثبت او منفي) قیمت ورکړو او د جمع، ضرب، تقسیم او منفي څلورګونې علمیې ورباندې ترسره کړو.

۱- **د جمعې عملیه:** د څو عددونو یا هم جنسو شیانو یو ځای کولو ته جمع وایي، لکه:

5+4+2 +1/48+6=23+9/4=25.25

۲- **د تفریق عملیه:** د دوو کمیتونو ترمنځ توپیر ته د تفریق عملیه ویل کېږي، لکه:

100=596-496

۳- **د ضرب عملیه:** د جمعې لنډې طریقې ته ضرب ویل کېږي، لکه:

625=25×25

۴- د تقسیم عملیه: د تفریق لنډې عملیې ته تقسیم ویل کېږي، لکه:

2=100/50=1/50×100=50÷100

X÷X=1

25x÷5x=25x×1/5x=25x/5x=5(5x)/5x=5

توان یا طاقت

طاقت: د یو متحول له طاقت نه عبارت دی او یا یو عدد د هغه حالت بیانوونکی دی چې تحول یا عدد د خپل توان په اندازه په خپل ځان کې ضرب شوی وي، لکه:

$X^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$

$6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 =$

$Y^6 = Y.Y.Y.Y.Y.Y$

د طاقت قوانین: د یادونې وړ ده چې د توان له قواعدو څخه ځینې په لاندې ډول دي.

۱- هر کله چې يو توان لرونکی عدد له مخرج څخه صورت ته او يا له صورت څخه مخرج ته يووړل شي، د طاقت اشاره يې تغير کوي؛ يعنې مثبت منفي کېږي او منفي مثبت کېږي؛ لکه:

$1)\quad y^{-6}=\frac{1}{y^{6}} \qquad 2)\quad y^{-6}=\frac{1}{6}$

۲- د ضرب په عمليه کې که قاعدې يو شان وي طاقتونه سره جمع کېږي؛ لکه:

$x^{4}.x^{5}.x^{6}=x^{4+5+6}=x^{15}$

۳- د تقسيم په عمليه کې که چېرې قاعدې سره مساوي وي، له قاعدو څخه يوه نيول کېږي، توانونه له يو بل نه منفي کېږي؛ لکه:

$\frac{x^{9}}{x^{5}}=x^{9-5}=x^{4} \qquad \frac{4^{8}}{4^{5}}4^{8-5}=4^{3}$

٤- د طاقتونو په عمليه کې که چېرې کلي شکل ولري، توانونه سره ضربېږي؛ لکه:

$\left(x^{2}\right)^{4}=x^{2.4}=x^{8}$

۵- هر عدد په توان د صفر مساوي له يوه سره دی، لکه:

$x^{0}=1 \qquad (2x+1)^{0}=1 \qquad 2^{0}=1$

٦- کله چې طاقت لرونکې افاده لاندې شکل ولري، کولای شو هغه په لاندې ډول وليکو:

$(a.d)^{p}=a^{p}.d^{p}$

$(2x6)^{6}=2^{6}\cdot 6^{6}$

او همدارنګه که $\left(\frac{x}{y}\right)^{q}$ شکل ولري، په لاندې شکل يې ليکو.

$\left(\frac{x}{y}\right)^{q}=\frac{x^{q}}{y^{q}} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^{4}=\frac{4^{4}}{5^{4}}$

۷- هر عدد د يوه په توان مساوي له هماغه عدد سره دی؛ لکه:

2 $\quad d^{1}=d \quad b^{1}=b \quad (1000)^{1}=1000=2^{1}$

مشهور مطابقتونه

۱- که مطابقت $(a+b)^2$ شکل ولري، دارنګه يې ثبوتوو، چې:

$1\text{-}\ (a+b)^2 = (a+b)(a+b)= a^2 + 2ab +b^2$

$2\text{-}\ (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab+b^2$

$3\text{-}\ (a+b)^3 = a^3 +3a^2b+3ab^2+b^3$

ثبوت: لرو چې:

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2$

$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$

$(a+b)^3 = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=>(a+b)^3 =a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

که $(a-b)^3$ ولرو دا رنګه يې ثبوتوو:

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

ثبوت: مطابقت ته په کتو سره لرو چې.

$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$(a-b)^3=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

مطابقت چې دا $(a+b)^4$ و $(a+b)^5$ شکل ولري، د فکتوريل په شکل انکشاف ورکوو او مطابقت په اسانه ډول حلوو.

$$(a+b)^4=a^4+\frac{4}{1}a^3b+\frac{4.3}{1.2}a^2b^2+\frac{4.3.2}{1.2.3}ab^3+\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}b^4$$

$=(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$$(a+b)^5=a^5+\frac{5}{1}a^4b+\frac{5.4}{2}a^3b^2+\frac{5.4.3}{3.1}a^2b^3+\frac{5.4.3.2}{4.1}ab^4+\frac{5.4.3.2.1}{5.1}b^5$$

$=(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

او همدارنګه که $(a+b)^n$ مطابقت ولرو، کولای شو هغه په لاندې شکل مخکې يوسو.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{11}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + ... + b^n$$

۲- هغه مطابقتونه چې $(a-b)^n$ شکل ولري، په انکشاف کې د لومړي ګروپ د مطابقتونو په شان وي او يواځې په علامه کې توپير لري. څرنګه چې لومړني مطابقتونه ټول مثبت دي

او په دوهم کې د اول حد علامه مثبت او د دوهم منفي د درېیم مثبت په همدې ترتیب تر اخره علامې ترتیب او پید ا کولای شو؛ لکه:

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^4$$

۳- هغه مطابقتونه چې $(a^n - b^n)$ شکل ولري، ټول مطابقتونه د حاصل ضرب په شکل په دوو قوسونو تجزیه کېږي، لومړی د دوو حدونو د قاعدو تفاضل دی، دوهم قوس n حد لري، د هغې د ټولو حدونو علامې مثبتې دي. په لومړي حدکې د a توانونه له $(n-1)$ څخه عبارت دي او د b توان صفر او له حدونو څخه د a له توان یو کم شوی او b ته ورکړل شوی، تر هغې چې د a توان صفر او د b توان $(n-1)$ ته ورسېږي؛ لکه:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ یا $a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2$

٤- مطابقت چې په $a^3 - b^3$ ډول وي دارنګه یې ثبوتوو:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2ab + b^2)$$

ثبوت: د هغې د ثبوت لپاره له دې $(a-b)^3$ مطابقت نه ګټه اخلو، څرنګه چې:
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ دی، ځکه نو $3a^2b - 3ab^2$ پرې ورزیاتوو:

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)[(a-b)^2 + 3ab]$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)[a^2 - 2ab + b^2 + 3ab]$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$
$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3)$$
$$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3)$$

او بالاخره که n یو طبیعي عدد وي؛ نو لیکلی شو چې:

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+ a^{n-2}b+ a^{n-3}b^2\ldots+b^{n-1}$

۵- که مطابقت a^n+b^n شکل ولري او که nطاق وي، ټول مطابقتونه د دې ګروپ د دوه قوسونو د ضرب په حاصل تجزیه کېږي لومړی قوس د دوو حدونو د قاعدو مجموعه ده او دوهم قوس n حد لري. د اول حد علامه مثبته، د دویم منفي او د درېیم مثبته، په همدې ترتیب ادامه ورکول کېږي؛ لکه: $a^3+b^3= (a+b) (a^2-ab+b^2)$

$a^5+b^5= (a+b) (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

$a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2} b+a^{n-3} b^2\ldots\ldots +b^{n-1})$

کهa^n+b^n وي او n جفت وي، د دې ګروپ د ټولو مطابقتونو په تجزیه کې د دوو قوسونو د ضرب په حاصل بدلېږي، لومړی حد د هر قوس د مطابقتونو د قاعدو د حدونو مجموعه وي او د قوسونو دوهم حد د دوهم جذر د مطابقت د قاعدو د ضرب د حاصل دوه برابره وي:

$$a^2+b^2=(a+b-\sqrt{2ab})(a+b+\sqrt{2ab})$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2-\sqrt{2a^2b^2})(a^2+b^2+\sqrt{2a^2b^2})$$
$$a^6+b^6=(a^3)^2+(b^3)^2=(a^3+b^3-\sqrt{2a^3b^3})(a^3+b^3+\sqrt{2a^3b^3})$$

د ځمونې په توګه یواځې یو یا دوه مطابقتونه a^2+b^2 او a^4+b^4 ثبوتوو.

$$a^2+b^2=(a+b-\sqrt{2ab})(a+b+\sqrt{2ab})$$

د $(a+b)^2$ مطابقت ثبوت ته انکشاف ورکوو.

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$a^2+2ab\ \ +b^2=(a+b)^2$ یا

یاځرنګه چې 2ab- تر جذر لاندې نیسو او هم یې مربع کوو، په معادله کې کوم بدلون نه ر اځي:

$$a^2+b^2=(a+b)^2-\left(\sqrt{2ab}\right)^2$$
$$a^2+b^2=(a+b-\sqrt{2ab})(a+b+\sqrt{2ab})$$
$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2-\sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2+b^2+\sqrt{2a^2b^2}\right)$$

ثبوت:

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$
$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-\left(\sqrt{(2a^2b^2)}\right)^2$$
$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2-\sqrt{(2a^2b^2)}\right)\left(a^2+b^2+\sqrt{(2a^2b^2)}\right)$$
$$a^4+b^4=\left(a^2+b^2-\sqrt{2ab}\right)\left(a^2+b^2+\sqrt{2ab}\right)$$

جذر

جذر په لغت کې ريښې او په اصطلاح کې د يو عدد جذر له هغه عدد څخه عبارت دی، چې د درجې په توان رفع شي د جذر لاندې عدد په لاس راشي، يعنې د يوه عدد دوهم جذر عبارت له هغه عدد څخه دی چې د -۲- په توان رفع شي او د يوه عدد درېيم جذر د ۳- په توان رفع شي او همدارنګه د يادونې وړ ده چې n ام جذر د يو عدد د n ام په درجه رفع کېږي. جذرونه عموماً په دوو طريقو پيدا کولی شو.

۱- د تجزيې په طريقه

۲- په عمومي طريقه

۱- د تجزيې په طريقه د جذرونو پيدا کول: عدد تجزيه کوو او ضربي عوامل يې دوه په دوه او دوه جوړې له هرې جوړې نه يو عدد نيسو، يو له بل سره يې ضربوو، دويم جذر په لاس راځي؛ لکه: د ۱۴۴ دويم جذر دا رنګه پيدا کوو:

2 {	2	144
	2	72
2 {	2	36
	2	18
3 {	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt{144}=2.2.3=12$$

۲- په عمومي طريقه: د عدد ښي لوري ته د تقسيم علامه او چپ لوري ته يو عمود خط رسموو او د عدد له ښي لوري څخه دوه دوه خانې جدا کوو، په اخر کې به عدد دوه ځلي (جوړه) يو ځلي يواځې پاتې شي او په هغې حالت کې عدد پيدا کوو، دا عدد که په خپل ځان کې ضرب شي، له وروستي عدد سره به مساوي يا به لږ له هغې نه کم شي، هغه

عدد د تقسیم په علامه لیکل کېږي، په خپل ځان کې ضربېږي، د ضرب حاصل یې د آخري عدد لاندې لیکل کېږي او له هغه عدد څخه منفي کېږي، دوه وروستي رقمونه ښکته راوړو او په همدې ډول خپلې عملیې ته ادامه ورکوو.

مثلاً: د ۶۴۵۱۶ عدد دویم جذر دارنګه پیدا کوو.

	64516	254
2	4	
45	245	
	225	
504	2016	
	2016	
	X	

$$=\sqrt{64516}=254$$

او د یوه عدد دریم جذر یوازې د تجزیې په طریقه پیدا کوو.

کولای شو له مساوي ضربي عواملو څخه 3 او3 جوړې جدا او د هرې یوې جوړې څخه یو عدد نیسو او یو له بل سره یې ضربوو، د هماغه عدد دریم جذر پیدا کېږي، لکه د ۱۷۲۸ عدد دریم جذر دارنګه پیدا کوو.

2	2	1728
	2	864
	2	432
2	2	216
	2	108
	2	54
3	3	27
	3	9
	3	3
		1

2.2.3=12

یا $\sqrt{1728}=2.2.3=12$

د ۴-۵-۶ او نورو جذرونو په پیدا کولو.

(۴،۴) ،(۵،۵)،(۶،۶) او نور مساوي ضربي عوامل جوړې کېږي، په دې ترتيب هر جذر چې وغواړو پيدا کولی شو.

د جذر قواعد يا (د جذر قوانين)

لومړۍ قاعده: که څو جذري عددونه د ضرب په حالت کې وي او د جذر لاندې عددونه سره مساوي او درجې يې سره يوشان نه وي، که وغواړو چې دوی تر يوه جذر لاندې راولو، لومړی دوی توان ته اړوو او وروسته د طاقت قانون پرې عملي کوو، وروستی عدد د دويم ځل لپاره تر جذر لاندې راولو.

لکه:

$$\sqrt{2}.\sqrt[3]{2}.\sqrt[5]{2}.\sqrt[7]{2}.\sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{5}}.2^{\frac{1}{7}}.2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{6}} =$$

$$2^{\frac{630+420+252+180+210}{1260}} = 2^{\frac{1692}{1260}} = \sqrt[1260]{2^{1692}}$$

۲- که څو جذري عددونه د ضرب په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مختلف وي او درجې يې مساوي وي، کولای شو د طاقتونو د قوانينو مطابق هغوی تر يوه جذر لاندې راولو.

$$\sqrt[5]{3}.\sqrt[5]{4}.\sqrt[5]{6}.\sqrt[5]{2} = 3^{\frac{1}{5}}.4^{\frac{1}{5}}.6^{\frac{1}{5}}.2^{\frac{1}{5}} = (3.4.6.2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{144}$$

۳- که جذري عدد د تقسيم په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مساوي وي، د جذرونو درجې يې سره مساوي نه وي او وغواړو دوی تر يوه جذر لاندې راولو؛ نو د طاقت له قوانينو څخه ګټه اخلو، لکه:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{5-3}{15}} = 3^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{3^2}$$

د جذرونو د آسانه حل لپاره د جذرونو د درجې د ضرب حاصل، د جذرونو درجه او د هغوی د تفريق حاصل د تر جذر لاندې عدد توان دی، لکه:

۱- $\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[7]{4}} = \sqrt[42]{4}$

۲- $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[8]{5}} = \sqrt[24]{5^5}$

۳- $\dfrac{\sqrt[7]{3}}{\sqrt[8]{3}} = \sqrt[56]{5}$

٤- که تر جذر لاندې عدد د تقسیم په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مختلف او درجې يې مساوي وي، د طاقت د قوانینو په اساس يې تر یوه جذر لاندې راوستی شو، لکه:

$$\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{4^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}$$ یا $$\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}$$ یا $$\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}} = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}$$

٥- کله چې یو جذري عدد د جذر په درجه رفع شي، تر جذر لاندې عدد په لاس راځي، لکه:

1- $(\sqrt[n]{b})^n = (b^{\frac{1}{n}})^n = b$

2- $(\sqrt[4]{6})^4 = (6^{\frac{1}{4}})^4 = 6^{\frac{4}{4}} = 6^1 = 6$

3- $x(\sqrt[6]{7})^6 = (7^{\frac{1}{6}})^6 = 7^{\frac{6}{6}} = 7$

٦- که تر جذر لاندې عدد تر څو نورو جذرونو لاندې وي، کولای شو ولیکو:

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = p.m.n\sqrt{a}$$ یا $$= \left[(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} \right]^{\frac{1}{p}} = p\,.\,\mathrm{m}\,.\,\mathrm{n}\sqrt{a}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left[(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{21} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

یادونه په کار ده چې که څو داسې جذرونه ولرو، چې درجې او د جذر عددونه يې مختلف وي؛ د جذرونو درجې يې سره ضربوو؛ څو د جذر عمومي درجه په لاس راشي او عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو، چې د جذري عدد توان په لاس راشي، وروسته د طاقت قوانین پرې تطبیقوو، لکه:

1- $\sqrt[3]{2}.\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{2^4}.\sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{2^4.5^3} = \sqrt[12]{16.125}$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{\sqrt[12]{5^4}}{\sqrt[12]{4^3}} = \sqrt[12]{\frac{5^4}{4^3}}$$

د جذري اعدادو جمع او تفریق: جذري عددونه چې تر جذر لاندې عددونه او درجې یې سره مساوي وي، جمع او تفریق کولی شو، لکه:

$$1:\ 9.\sqrt{2}+3.\sqrt{2}+5.\sqrt{2}-4.\sqrt{2}=(9+3+5).\sqrt{2}-4.\sqrt{2}$$
$$=(17-4).\sqrt{2}=13.\sqrt{2}$$
$$2:5.\sqrt{8}+2.\sqrt{32}-\sqrt{128}=10\sqrt{2}+8\sqrt{2}-8\sqrt{2}(10+8-8)\sqrt{2}=10\sqrt{2}$$

د کسرونو ګویا کول

کولای شو د یوه کسر صورت او مخرج ګویا کړو؛ خو په ریاضي کې مخرجونه ګویا کولای شو، د جذرونو د ګویا کولو لپاره د کسر صورت او مخرج د جذري عدد په مخرج کې ضربوو، لکه:

$$1:\frac{3}{\sqrt{8}}=\frac{3.\sqrt{8}}{\sqrt{8}.\sqrt{8}}=\frac{3.\sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2}=\frac{3.\sqrt{8}}{8}$$
$$2:\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{10.\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{10.\sqrt{5}}{5}$$
$$3:\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9.\sqrt{9}}{\sqrt{9}.\sqrt{9}}=\frac{9.\sqrt{9}}{\sqrt{9^2}}=\frac{9.\sqrt{9}}{9}=\sqrt{9}$$

۲- که دکسر په مخرج کې یو جذر وي او درجه یې له دوو زیاته وي، داسې یې حل کولای شو:

$$1:\frac{2}{\sqrt[3]{3}}=\frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\ .\sqrt{3^2}}=\frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3.3^2}}=\frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{.\sqrt[3]{3^3}}=\frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{3}$$
$$2:\frac{2}{\sqrt[5]{3}}=\frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\ .\sqrt[5]{3^4}}=\frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3.3^4}}=\frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{.\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{3}$$
$$3:\frac{5}{\sqrt[7]{3^2}}=\frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2}.\sqrt[7]{3^5}}=\frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2.3^5}}=\frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{.\sqrt[7]{3^7}}=\frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{3}$$

د غیر ناطقو کسرونو ګویا کول

د مخرج ګویا کول په 5 حالتونو کې مطالعه کوو.

۱- د مخرج ګویا کول چې د مخرج درجه یې یو جذري حد وي او د هغې درجه 2 وي، د صورت د ګویا کولو لپاره یې د مخرج په جذري عدد کې ضربوو، لکه:

$$1:\frac{X}{\sqrt{X}}=\frac{X.\sqrt{X}}{\sqrt{X}.\sqrt{X}}=\frac{X.\sqrt{X}}{\sqrt{X^2}}=\frac{X.\sqrt{X}}{X}=\sqrt{X}$$

۲- که د مخرج درجه له دوو زیاته وي، د داسې کسرونو د مخرجونو د ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د جذري عدد په مخرج کې ضربوو، د درجې او توان د تفاضل په اندازه جذري عدد ته توان ورکوو، لکه:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{6}}=\frac{3\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{6^2}}=\frac{3\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6.6^2}}=\frac{3\sqrt[3]{6^2}}{6}=\frac{3\sqrt[3]{6^2}}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt[5]{x}}=\frac{x.\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}.\sqrt[5]{x^4}}=\frac{x\sqrt[5]{x^4}}{x\sqrt[5]{x.x^4}}=\frac{x.\sqrt[5]{x^4}}{x^2}=\frac{\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

۳ - که د کسر په مخرج کې دوه جذري عددونه، لکه $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او یا د کسر په مخرج کې یو جذري عدد او یو غیر جذري عدد وي، لکه $\frac{5}{\sqrt{7}-2}$ د کسر د مخرج د ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو، لکه:

$$1)\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}=-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$2)\frac{4}{\sqrt{6}-2}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6^2}-2^2)}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4}=\frac{4(\sqrt{6}+2)}{2}=2(\sqrt{6}+2)$$

$$3)\frac{d-c}{\sqrt{d}-\sqrt{c}}=\frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{(\sqrt{d}-\sqrt{c})(\sqrt{d}+\sqrt{c})}=\frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{\sqrt{d^2}-\sqrt{c^2}}=\frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{(d-c)}=\sqrt{d}+\sqrt{c}$$

٤- که د یوه کسر په مخرج کې درې جذري عددونه، دوه جذري عددونه او یو غیر جذري عدد وي، د داسې کسرونو د ساده کولو لپاره دوه حده یو حد فرضوو، وروسته د مخرج په مزدوج کې صورت او مخرج ضربوو، لکه:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{5\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{5}\}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=$$

$$\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{3+2\sqrt{6}+2-5}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}=\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2.\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\frac{5.\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{12}$$

۵- که د کسر په مخرج کې دوه جذري عددونه وي او د جذرونو درجې له دوو څخه زیاتې وي، د داسې کسرونو د مخرج د ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د $a^3 \pm b^3$ مطابقت په دویم قوس کې ضربوو.

$$1)\ \frac{4}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}}=\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{6^2}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2})}=\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{6-2}=$$

$$\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{4}=(\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}$$

$$2)\ \frac{4}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}}=\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2})}=\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{6+2}=$$

$$\frac{4(\sqrt[3]{6^2}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{2^2}}{8}=\frac{\sqrt[3]{36}-\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{4}}{2}$$

د لومړي څپرکي پوښتنې:

۱- لاندې مطابقتونو ته انکشاف ورکړئ؟

1) $(3x+2y)^2=?$

2) $(2x+2y)^3=?$

3) $(2x-3y)^5=?$

4) $(A+B+C)^3=?$

5) $(2x)4-(3y)^4=?$

6) $(a-)^6=?$

7) $(x-\ b\ y)^8=?$

8) $(m+1)^2-(m-1)^2=?$

9) $(m+n+p+1)^2=?$

10) $a^6+b^6=?$

11) $a^6-b^6=?$

۲- تر یوه جذر لاندې یې راولئ؟

1) $\sqrt[4]{2}.\sqrt[5]{2}.\sqrt[7]{2}.\sqrt[8]{2} = ?$

2) $\sqrt{3}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[5]{3} = ?$

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = ?$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = ?$

5) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}} = ?$

6) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{15}}}} = ?$

۳- لاندې جذري اعداد جمع او تفریق کړئ؟

1) $\sqrt{2} + \sqrt{128} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[2]{2^8} = ?$

2) $\sqrt[5]{3} + \sqrt[4]{27} + \sqrt{243} - \sqrt[9]{27} = ?$

3) $(\sqrt[4]{x^2} + y^2)^4 + (\sqrt{2x^2 + 3y^2})^2 = \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}\right]^4 (x_2 + y^2)^{\frac{1}{4}})^4 + (2x^2 + 3y^2)^{\frac{2}{2}} =$

$x^2 + y^2 + 2x^2 + 3y^2$

$= 3x^2 + 4y^2$

۴- لاندې کسرونه ګویا کړئ.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$

2) $\dfrac{4}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

3) $\dfrac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

4) $\dfrac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

5) $\dfrac{2}{8\sqrt{x^2}}$

6) $\dfrac{2}{\sqrt{4} - \sqrt{6}}$

7) $\dfrac{x}{\sqrt[5]{x}}$

8) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{8}}$

دویم څپرکی

معادلې او توابع

ټولیزه موخه:

د انسانانو په ټولنیز ژوند کې د معادلو، توابعو او د هغو د رابطو سم او اساسي درک، د توابعو او معادلو په اصولو او قواعدو پوهېدنه، د مسایلو حل او د ګرافونو رسمول په ټولو تولیدي، صنعتي او هغو مسایلو کې، چې انسانان په ورځني ژوند کې ورسره سروکار لري.

د زدکړې موخې: د دې څپرکي په پای کې باید محصلین په لاندې برخو کې پوهه ترلاسه کړي:

۱- په سمه توګه د معادلو او توابعو مفهوم درک کړي.

۲- رابطه، معادله رابطه، تحول او تغیر، د تعریف ناحیه او د قیمتونو ناحیه وپېژني، د تابع او پوښتنو اساسي مفهوم او د دې اړوندې مسألې په صحیح ډول محاسبه کړي.

۳- تابع، مرکبې او معکوسې توابع تعریف او مسایل د هغوی له قواعدو سره سم حل او محاسبه کړي.

٤- معادله تعریف او ګرافونه په سم شکل رسم کړي.

۵- لومړۍ درجه دوه مجهوله او درې مجهوله معادلې تعریف او د پوښتنو د حل لپاره له هغو لارو کار واخلي چې په دې څپرکي کې په کار وړل شوي او مسألې په اسانۍ سره حل کړي.

معادلات او توابع

توابع: د تابع مفهوم په 18 پېړۍ کې ریاضیاتو ته راغی چې اوس د ریاضي په مسایلو کې له عمده بحثونو څخه دی، په ډېرو اقتصادي مسایلو او محاسبوي مېتودونو کې ترې کار اخیستل کېږي، چې د توابعو د تحولاتو او خواصو د مطالعې شاوخوا راڅرخي.

صنعتي، توليدي او نور مسایل ډېر ځله د توابعو په مرسته تشرېح او توضېح کېږي، په دې څپرکي کې تابع او د هغې خواص معرفي کېږي.

رابطه: د شیانو د مرتبو او متشکلو جوړو او مفاهیمو سیټ له یوې رابطې څخه عبارت دی چې د مرتبو جوړو د لومړنیو عناصرو سیټ ته د رابطې د تعریف ناحیه (د رابطې دامنه) او د دوهمو مرکبو سیټ ته یې د رابطې د قیمتونه ناحیه (د رابطې برد) ویل کېږي، د A او B سیټونه په پام کې نیسو، که R د A او B دوو سیټونو ترمنځ رابطه وي؛ نو R د AXB یو فرعي سیټ دی.

یعنې RCA.B او د $(X,Y)\in R$ لپاره لیکو چې XRY ویل کېږي، چې Y,X د R په واسطه په ارتباط کې دی، یعنې $(X,Y)\in R = XRY$

مثال:$R=\{(1,2),(3,6),(4,8)\}$ رابطه ده.

لکه څنګه چې په NXN کې $D=[1,3,4]$ د تعریف ناحیه ده، او د قیمتونو ناحیه یې $E=\{2,6,8\}$ وي.

۲ مثال- د $R=\{(X,Y);(X,Y)\in R، x<y$ رابطه په پام کې نیسو، ښکاره ده چې: $(x,y)\in R = x<y$ وي، یعنې $(2,5)\in Rr = 2<5$. همدارنګه باید ووایو چې $R\notin$ ($6,4$)دی او $4 \not< 6$ نه شي کېدای.

۳ مثال - د $R=\{(x,y)\in IR : x^2+y^2=4\}$ رابطه د دایرې پر مخ له نقطو څخه عبارت ده چې شعاع یې 2 او مرکز یې $(0,0)$ وي.

$(0,-2)\in R(0)2+(-2)2=4 \Rightarrow 4=4$

$(1,\sqrt{3}0\in R:(1)^2+(\sqrt{3})^2=4\Rightarrow 4=4$

$(1,3)\notin R:(1)^2+(3)^2\neq 4$

معادله رابطه: R رابطې ته د A په سیټ کې معادله رابطه وایي، که د دریو لاندې خاصیتونو لرونکې وي.

۱- انعکاسي: یعنې د هر عنصر لپاره $x\in R$ د (x,y) جوړه په R کې په لاس راشي.

$VX\in A\Rightarrow (x,x)\in R$

۲- تناظري: په R کې د (x,y) له ګډون څخه په R کې (y,x) په لاس راشي.

$(x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R$

۳- که $(x,y)\in R$ و $(y,x)\in R$ وي، $(x,z)\in R$ شرط په لاس راشي، یعنې:

$(x,y)\in R(y,z)\in R\Rightarrow (x,z)\in R$

تابع

د F تابع د A له سيټ څخه په B سيټ کې عبارت له هغه رابطې څخه ده چې هر عنصر د A څخه يوازې او يوازې يو عنصر y=F(x) د B سيټ له هر عنصر سره اړيکه ولري، څکه نو د (x,y) مرتبو زوجونو د سيټ څخه عبارت دی، چې په هغه کې د x مرکبې تکرار نه شي.

تابع هغه رابطه ده چې لومړنۍ مرکبې يې تکراري نه وي، له A څخه په B کې د F تابع y=f(x) معادلې په واسطه په لاندې شکل ښودلی شو.

$$F : A \to B$$
$$x \to y = F(x)$$

X ته مستقل تحول او y دx مربوط متحول دی.

او تحول د رياضي له افادې څخه عبارت دی، چې کولای شي د ارزښتونو له مجموعې څخه هر يو ارزښت ځان ته غوره کړي.

د تابع د تعريف او قېمتونو ناحيه

هرکله چې F تابع د A له سيټ څخه په B سيټ کې وي، دارنګه يې ليکلی شو چې $x \in A$ او $y \in B$.

په نتيجه کې y=f(x) ټول سيټ د x ؛ نو له A څخه په y=f(x) رابطه کې د کارونې وړ دی. د f د تعريف د ناحيې په نامه يا د f د دامنې په نامه او د y سيټ، چې د يادې رابطې نه په لاس راځي، د قيمتونو د ناحيې په نامه او يا fd تابع د ګټې په نوم يادېږي.

عبارت لرونکې ناحيې:

$$Df = \{x \in A : y = f(x)\}$$
$$Rf = \{y \in B : y = f(x)\}, x \in A\}$$

متحول يا متغير

معمولاً متحول په دوه ډولو تقسيم شوی دی چې د تابع د متحول په نوم او يا د مستقلې تابع د متحول په نامه يادېږي او په رياضي کې متحول د z,y,x او نورو پواسطه ښودل کېږي، چې هر يو له ممکنه ارزښتونو سره د مجموعي ارزښتونو له مخې اختيارېږي، د مثال په توګه که په بازار کې د يوه توکي قيمت زياتېږي، د هغې قيمت هم پورته ، که تقاضا کمه شي په څنګ کې قيمت هم کمېږي. په نتيجه کې د دوه متحولونو ترمنځ رابطې ته بايد تابع وويل شي. متحولونه کېدای شي متمادي يا غير متمادي وي.

۱-متمادي متحول: هغه دی چې د هغې ارزښت وکولی شي د ډېرو کوچنيو مقاديرو لرونکی وي، معمولاً متمادي متحولونه د متمادي اعدادو پواسطه افاده کېږي، لکه په يوه منطقه کې د حرارت درجې اړونده اعداد او نور.

۲-غیر متمادي متحول: هغه دی چې د غیر متمادي اعدادو پواسطه ښودل شوی وي، وکولی شي چې له ارزښتونو څخه د هر یوه ترمنځ واټن وجود ولري، لکه د تولید د واحدونو شمېر، د ټولنې د وګړو شمېر او نور. څکه نو باید وویل شي، چې تابع کېدای شي ضمني یا صریحه وي، په صریحو توابعو کې د دوو متحولونو ترمنځ رابطه کاملاً روښانه ده، لکه:

$y=2x^2$. $y=2x$ ویا $X,y=6$

په ضمني توابعو کې د دو متحولونو ترمنځ فاصله که څه هم چې موجود او د تثبیت وړ دي، ولې په اوله مرحله کې ښکاره نه ده، وروسته معلومېږي، لکه:

$4x+3y-3=0$

باید یادونه وشي چې که د تا بع متحول د تابع د متحول د ارزښت په تغیر ځان ته ارزښت اختیار کړای شي، د یو ارزښته تابع په نوم په یو قیمته او یو نرخه مسمی وي او که د تابع متحول د تابع د متحول د تغیر د ارزښت په اثر له یوه نه زیات ارزښتونه ځان ته اختیار کړای شي؛ د څو قیمته تابع په نامه یادېږي لکه:

$y=4x$

$x^2+y^2-16=0$

$y^2=-x^2+16$

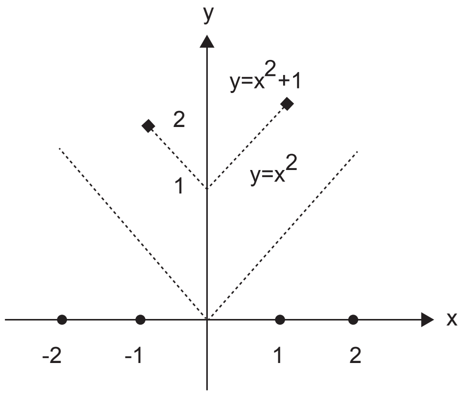
د تابع ګراف

د(x,y) د نقطو سیټ له ستون څخه نظر د قایم مختصاتو ته عبارت دی $y=f(x)$ له ګراف څخه. که ذکر شوی مساوات صدق وکړي؛ نو په حقیقت کې ګراف منحني دی، چې د $y=f(x)$ معادلې په ذریعه ټاکل کېږي.

د تابع د ګراف انتقال

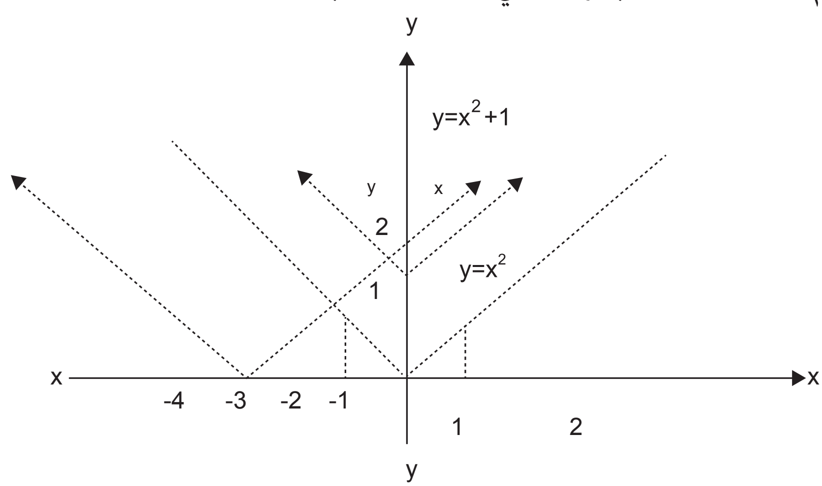
هر کله چې $f(x)$ تابع او c یو حقیقي عدد وي، په دې صورت کې د تابع $y=f(x)+c$ ګراف د $y=f(x)$ د ګراف عمودي انتقال دی، که چېري $c>0$ پورته خوا ته او که $c<o$ ښکته خواته وي او همدارنګه$y=f(x+c)$ ګراف د$y=f(x)$ ګراف له افقي انتقال څخه عبارت دی، که چېرې $c>0$ کینې خواته ا و $c<0$ ښې خواته وي.

مثال: د $y=x^2+1$ عمودي انتقال له $y=x^2$ ګراف څخه دی.



$y=x^2$		$y=x^2+1$	
X	Y	X	Y
2	4	2	5
1	1	1	2
0	0	0	1
-1	1	-1	2
-2	4	-2	5

دويم مثال: د $y=(x+2)^2$ گراف افقي انتقال له $y = x^2$ څخه دی.



$y=x^2$		$y=x^2+1$	
X	Y	X	Y
2	4	2	16
1	1	1	9
0	0	0	4
-1	1	-1	1
-2	4	-2	0
		-3	1
		-4	4

د توابعو الجبري عمليې

۱- په g,f تابع کې د جمعې او تفریق عملیه عبارت ده له $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

۲- په fg تابع کې د ضرب د حاصل عملیه په لاندې ډول لیکل کېږي.$(f.g)(x)=f(x).g(x)$

۳-د g,f د توابعو د تقسیم عملیه عبارت ده له $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$:که چېرې $g(x) \neq 0$ وي.

د توابعو الجبري قواعد: د h,g,f توابعو لپاره لاندې قواعد صدق کوي:

۱- $f+g=g+h$

۲- $f.g=g.f$

۳- $f+(g+h)=f+g)+h$

٤- $f(g.h)=(f.g).h$

د $Q(x)=0$ صفري تابع او د $I(x)=1$ عینیت تابع ته په کتو لرو چې:

٥- $f+a=f$

٦- $fI=f$

۷- $f(g+h)=(fg+fh)$

همدارنګه د d,c,b,a حقیقي عددونو او h,g,f توابعو لپاره په اسانۍ ښودلی شو چې:

۸- $a(f+g)=af+ag$

۹- $(a+b)f=af+bf$

۱۰- $a(f.g)=(af)g$

۱۱- $(a.d)f=d(af)$

۱۲- $(c.d)h=c(d.h)$

مثال: که $g(x)=x^2+1$, $f(x)=2x+1$ وي، لرو چې :

a) $4(f+g)x=4(f(x))+4.g(x)=$

$=4(2x+1)+4(x^2+1)=8x+4+4x^2+4=4x^2+8x+8$

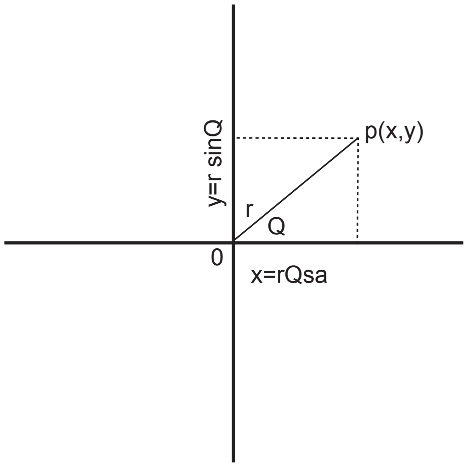
b) $5(f.g)(x)=[5(f(x)].g(x)=[5(2x+1)].(x^2+1)$

$=(10x+5)(x^2+5)=10x^3+50x+5x^2+25$

$=10x^3+5x^2+50x+25$

او همدارنګه موږ غواړو چې توابع به ښه توګه وپېژنو، نو ځیني له توابعو څخه په لاندې ډول معرفي کوو:

۱- د عینیت تابع: دا تابع عبارت ده له $I(x)=x$ یا هغه په دې شکل $y=x$ لیکو، پوهېږو چې د عینیت د تابع ګراف د x له محور سره 45 درجې زاویه جوړوي او د مختصاتو له مبدا نه تېرېږي.



په پورته شکل کې لیدل کېږي چې افقي محور حقیقي محور او عمودي محور موهومي محور نومېږي، یعنې:

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

او Θ $y=r.\sin a$ ، $x = r.\cos.\Theta$ ، $z=r(\cos\Theta + I\, s.\Theta)$ او $\lg Q = \frac{y}{x}$ دی.

مثال: $z=2+2i$ عدد په قطبي شکل ولیکئ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2.\sqrt{2}$$

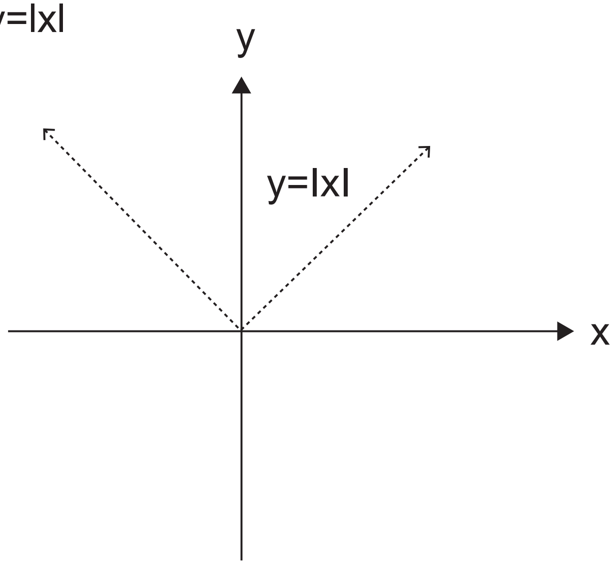
$$1 = \frac{2}{2} \lg q \text{یا}$$
$$\pi = 180$$
$$\pi/4 = x$$
$$x.\pi = 180.\pi/2$$
$$x = \frac{180.\pi/5}{\pi} = 45^\circ$$

۲- **د مطلقه قیمت تابع:** دا تابع عبارت ده له

$$f(x)=\{\begin{matrix} x & x\geq 0 \\ -x & x\leq 0 \end{matrix}$$

او همدارنګه په لاندې شکل یې هم لیکلای شو:

y=IxI



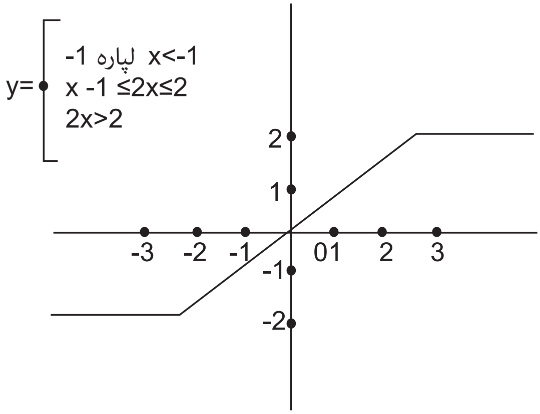
۳- **زینه یي تابع(د تام د لوی عدد تابع):** له هغه تابع څخه عبارت ده چې د x په هر عدد تر ټولو لوی تام عدد x کوچنی یا مساوي رابطه جوړوي او څرنګه چې د x د هر حقیقي عدد لپاره n تام عدد شتون لري داسې چې $n\leq n\leq n+1$ وي په لاندې شکل یې لیکلای شو:

$f(x)=[\![x]\!]\qquad n\leq n\leq n+1$

٤- **ثابته تابع:** هغه تابع ده چې د x په هر عدد یواځې له یو ثابت سره ربط ورکول کېږي، یعنېY=c او یا g(x)=c نو د ثابتې تابع ګراف د x په محور مستقیم خط وي.

٥- **توحید شوې تابع:** دا تابع عبارت له هغې تابع څخه ده چې په مختلفو انتروالونوکې د څو توابعو له پیوند څخه په لاس راځي او په لاندې ډول ده.

$$f(x)=\begin{cases} -1\Rightarrow & -1\geq x\leq 2 \\ x\Rightarrow & x\geq 0 \\ 2\Rightarrow & x\geq -1 \end{cases}$$



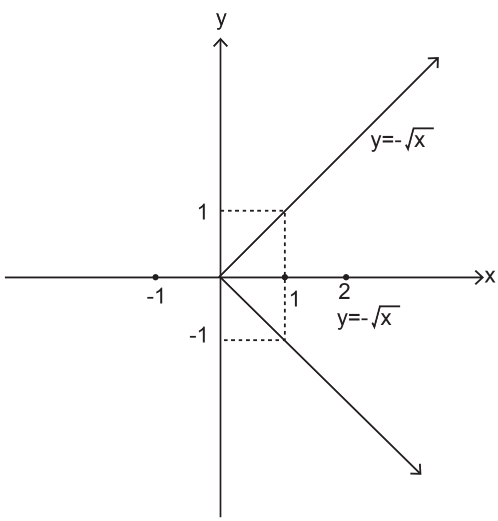
مثال:

د $y^2=x$ گراف نظر x ته متناظر دی، رسم یې کړئ.

$y^2=x$

دواړه خواوې تر جذر لاندې نیسو چې

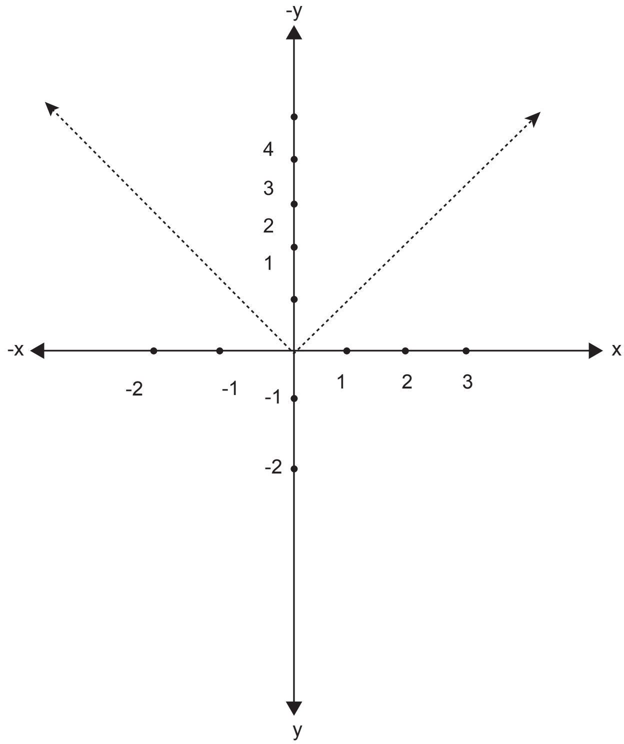
$$\sqrt{y^2}=\sqrt{x}\Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$$
$$y=\sqrt{x}$$
$$x=0\Rightarrow y=\sqrt{0}=0$$
$$x=1\Rightarrow y=\sqrt{1}=1$$



دويم مثال- که د $y=x^2$ منحني ګراف نظر y محور ته متناظر وي، رسم يې کړئ.

$y=x^2$

X	Y
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4



د توابعو تزايد او تناقص

۱- **د تابع تزايد:** په يوه انتروال کې د f تابع ته هغه وخت تزايد وايي چې $f(x)<f(y)$ خاصيت $x<y$ شرط او د y,x لپاره له دې انتروال څخه په لاس راتلای شي، لکه $f(x)=2x+3$ تزايد دی، ځکه چې:

$$f(x) \subset f(y) \Rightarrow 2x+3<2y+3 \Rightarrow 2x<2y \Rightarrow x<y$$

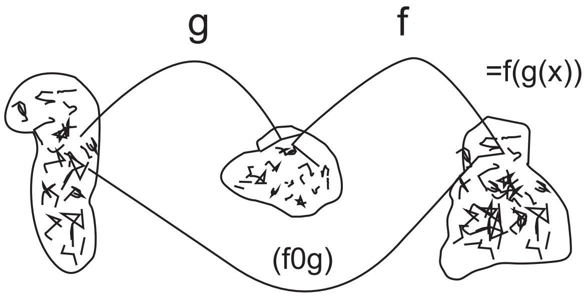
متناقصه تابع: په يوه انتروال کې د f تابع هغه وخت دقيقاً متناقصه ده چې لاندې خاصيت صدق وکړي: $f(x)>f(y)$ شرط $x>y$ د y,x د هر انتروال لپاره پيدا شي.

مثال: $g(x)=-2x+$ متناقصه ده، ځکه چې:

$$g(x)>g(y) \Rightarrow -2x<-2y \Rightarrow x>y$$

مرکبې توابع (د تابع تابع): مرکبې توابع عبارت له هغو توابعو څخه دي چې د f او g دوو توابعو له ترکیب څخه لاس ته راشي، لکه: $(fog)(x)=f(g(x))$ په دې شرط چې $g(x)$ د f د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل وي، fog ته مرکبه تابع وايي.

پورتنی فورمول کولای شو داسې ولیکو:



$(g.f)(x)=g(f(x))$
$(g.g)(x)=g(g(x))$
$(f.f)(x)=f(f(x))$

پورتنی فورمول کولای شو داسې ولیکو

مثال: کله چې $g(x)=2$ او $f(x)=x^2+1$ درکړل شوي وي، لرو چې:

$(fog)(x)=f(g(x))=(g(x))2+1=(2x)2+1=4x2+1$

$(gof)(x)=g(f(x))=2f(x)=2(x2+1)=2x2+2$

$(gog)(x)=g(g(x))=2g(x)=2(2x)=4x$

$(f0f)(x)=f(f(x))=(f(x)^2+1=(x^2+1)^2+1$

$=x4+2x^2+2$

$(f0g)(x)=4x^2+1$

$(gof)(x)^2x^2+2$

$(gog)(x)=4x$

$(f0f0(x)=x^4+2x^2+2$

$(fog)(30=4.3^2+1=37$

$(gof)(2)=2.2^2+2=10$

$(gog)(8)=4.8=32$

$(fof)(o)=(0)^3+2(0)^2+2=2$

دويم مثال- $g(x)=2$ او $f(x)=x^2+1$ توابع درکړل شوي

$$fog(x)=f[g(x)]=[g(x)]\ =[g(x)]^2+1=\sqrt{(1+x)^2}\ +1=1+x+1=\rangle f(g(x)=x+2$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{1+f(x)}=\sqrt{1+x^2+1}$$

$$\Rightarrow gof(x)=\sqrt{x^2+2}$$

اتحادي قوانين ، تبادلوي عمليه او د توابعو ترکيب

د توابعو د ترکيب په عمليه کې تبادلوي قانون تل صدق نه کوي، ولې اتحادي قانون صادق دی، يعنې د h,g ,f د درېيو توابعو لپاره کولای شو وليکو چې:

$$(fog)\neq gof$$

$$(fog)oh=fo(goh$$

مثال - د $f(x)=3x-1$ او $g(x)=\dfrac{x+1}{3}$ دوو توابعو لپاره لرو چې:

$$(fog)(x)=f(g(x))=3g(x)-1=3\cdot\frac{x+1}{3}-1=x+1-1=x\Rightarrow(fog)(x)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+1}{3}=\frac{3x+1-1}{3}=\frac{3x}{3}=x\Rightarrow(gof)(x)=x$$

فلهذا $fog=gof=1$

معکوس توابع: د f, g توابع يو د بل معکوسې دي. چې که لاندې دوه شرطونه صدق وکړي نو

$a)x\in D_g:(fog)(x)=f(g(x))=x$

$b)x\in D_f:(gof)(x)=g(f(x))=x$

معمولاً معکوسې توابع په لاندې شکل ليکل کېږي چې:

$f^{-1}=g$ $\qquad$ $g^{-1}=f$

واضحه او ښکاره ده چې

$$y=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y)$$

يا $y=f(x)\Rightarrow x=\dfrac{y}{f}\Rightarrow x=f^{-1}(y)$

څلورم مثال - $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \frac{x-3}{3}$ توابع یو د بل معکوسې دي.

$$(fog)(x) = f[g(x)] = 2(g(x)) + 3 = 2\frac{x-3}{2} + 3$$
$$\Rightarrow = x - 3 + 3 = x$$
$$\Rightarrow (fog)(x) = x$$
$$(gof)(x) = g(f(x) = \frac{f(x)-3}{2} = \frac{2x+3-3}{2}$$
$$= \frac{2x}{2} \Rightarrow (gof)(x) = x$$

پنځم مثال- د y=3x+5 تابع معکوس معلوم کړئ!

Y=3x+5

3x+5=y

3x=y-5

$$x = \frac{y-5}{3}$$

د معکوسې تابع پیداکول

هر ډول تابع د معکوس لرونکې نه وي او کله چې یو تابع د معکوس درلودونکی وي نو لازمه ده چې یو تابع به د یو پر یو له نوعې څخه وي، د یوه معکوس تابع د یو پر یو تابع دی. چې یو پر یو f د لاندی رابطو په مرسته لاس ته راځي.

یا په بل عبارت کېدای شي یوه تابع یو په یو نه وي اوکولای شو د تعریف د ناحیې په محدودولو یې یو په یو تابع ته واړوو.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow \frac{f}{f} \cdot x = x$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow \frac{\mathrm{f}}{f} \cdot x = x$$
$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y)$$
$$x = f(y) \Leftrightarrow y = \frac{x}{f} \Rightarrow f^{-1}(x)$$
$$\Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

مثال: د $f(x)=x^3-1$ معکوسه تابع په لاس راوړئ.
که f^{-1} د f معکوسه تابع وي نو دارنګه حل کېږي.

$$(fog^{-1})(x) = x \Leftrightarrow [(f^{-1}(x)]^3 - 1 = x$$
$$(f^{-1}(x))^3 = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{(f^{-1}(x))^3} = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

شپږم مثال- د $g(x)=x^2$ د $x>0$ لپاره د معکوس لرونکې ده. g^{-1} په لاس راوړئ.

$$g(g^{-1}(x) = x \Rightarrow (g^{-1}(x)\ ^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{g^{-1}(x)^2} = \sqrt{x} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

اووم مثال - د $h(x) = \frac{1}{x}$ تابع معکوس پیداکړئ.
حل:

$$(hoh^{-1})(x) = x \Rightarrow h[h^{-1}(x)] = x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{h^{-1}(x)} = x \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

لیدل کېږي، چې h او h^{-1} یو پر بل منطبق دي.
د یادونې وړ ده، چې د f(x) تابع معکوس یعنې $y=f^{-1}(x)$ په څرګنده له $f(y)=x$ رابطې څخه په لاس راوړو.

اتم مثال- د $f(x)=2x^3+4$ تابع معکوس پیداکړئ.
حل: په لاندې ډول یې پیداکوو چې:

$$f(y) = x \Rightarrow f(y) = x = 2y^3 + 4 = x \Rightarrow 2y^3 = x - 4$$
$$y^3 = \frac{x-4}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{\frac{x-4}{2}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}$$

او د هغې معکوس عبارت دی له

نهم مثال: د $g(x)=\frac{9}{5}x+32$ تابع معکوس پیداکړئ.
اطراف په 5 کې ضربوو

$$g(y)=x\Rightarrow \frac{9}{5}y+32=x$$
$$\frac{9}{5}y=x-32$$
$$9y=5(x-32)\Rightarrow y=\frac{5x-160}{9}$$
$$\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$$

لسم مثال: د $f(x)=x^2+6x+8$ تابع معکوس پیدا کړئ:

$$f(y)=y^2+6y+8=x$$
$$y^2+6y+8-x=0$$
$$\Rightarrow y=\frac{-b'\pm\sqrt{b'-a(c-x)}}{a}=-3\pm\sqrt{9-(6-x)}=-3\pm\sqrt{3+x}$$
$$f^{-1}(x)=-3+\sqrt{3+x}$$
$$f^{-1}(x)=-3-\sqrt{3+x}$$
$$x\geq -3$$
$$x\geq -3$$

یوولسم مثال: د $f(x)=x^2-8x+12$ تابع معکوس په مناسب محدودیت د هغې د تعریف ناحیه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$f(y)=x\Rightarrow y^2-8y+12=x$$
$$\Rightarrow y^2-8y+12-x=0$$
$$\Rightarrow y=\frac{-b'\pm\sqrt{b'-a(c-x)}}{a}=-4\pm\sqrt{16-(12-x)}=$$
$$y=4\pm\sqrt{4+x}$$

نو $x\geq -4$,$f^{1}(x)=4+\sqrt{4+x}$ یا

او یا $x\geq -4$,$f^{1}(x)=4-\sqrt{4+x}$

د معکوسې تابع ګراف

هغه توابع چې یو د بل معکوسې وي نظر y=x مستقیم ته د متناظر ګراف لرونکې وي

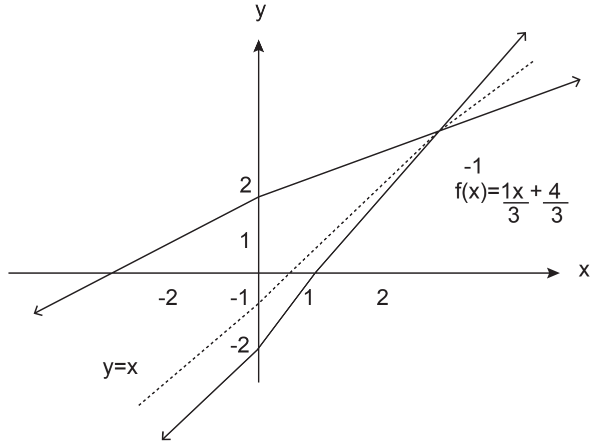
مثال: د f(x)=3x-4 تابع ګراف او د هغې معکوس رسم کړئ.

$$(fof^{-1})(x) = x \Rightarrow f(f'(x)) = x$$

$$f(y) = x \Rightarrow f(y) = 3y - 4 = x \Rightarrow 3y = x + 4$$

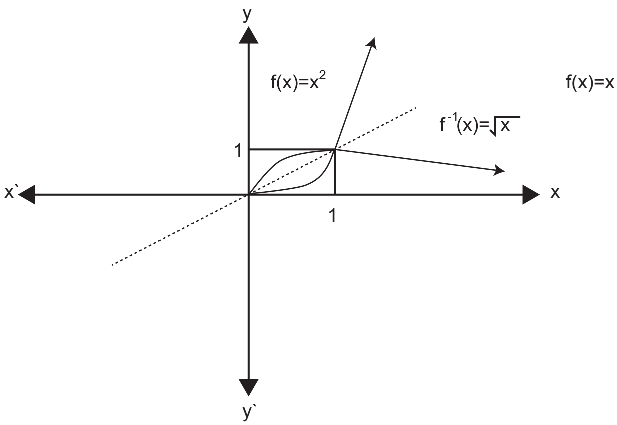
$$f(y) = 3y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$3f^{-1}(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 \Rightarrow fof^{-1})(x) = x$$



f(x)=3x-4
f(0)=3(0)-4
f(0)=-4
f(1)=3-4=-1
f(2)=6-4=2
f(-1)=-3-4=-7
f(-2)=-6-4=-10

دویم مثال: د $f(x)=x^2$ د معکوسې تابع ګراف رسم کړئ.



$f(0)=(0)^2=0$
$f(1)=(1)^2=1$
$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
$f(-1)=(-1)^2=1$
$f^{-1}(1)=1$
$f^{-1}(0)=0$

پوښتنې

لومړۍ پوښتنه: $f(x)=2x-\frac{1}{x}$ تابع راکړل شوې، د $f(0), f(\frac{1}{2}), f(1)$ و $f(-1)$ قیمتونو په نظر کې نیولو سره یې ولیکئ او د هغې ګراف رسم کړئ؟

دویمه پوښتنه: د $h(x)=\left|\frac{x-2}{x+3}\right|$ تابع درکړل شوې، د $h(0), h(0), h(\frac{1}{2}), h(2)$ قیمتونو په نظر کې نیولو سره هغه حل کړئ او د هغې ګراف رسم کړئ؟

درېیمه پوښتنه: د $g(x)=x^3$ معکوسه تابع رسم کړئ؟

څلورمه پوښتنه: د $f(x)=2x+1$ تابع رسم کړئ او $f(-2),f(2),f(-1),f(1),$ $f(0)$ قیمتونه په هغې باندې تطبیق کړئ؟

پنځمه پوښتنه: $f(x)=2x-3$ او $g(x)=3x^2-1$ توابع په نظر کې نیولو سره د $f+g, f-g, f.g, \frac{f}{g}$ توابع ولیکئ؟

شپږمه پوښتنه: د y,x محورونو ته د لاندې رابطو متناظر والي او مبدا تشخیص کړئ؟

1) $y^2=x$ 2) $g(x)=x^2$ 3) $y=2x+1$ 4) y^2-2

اوومه پوښتنه: کله چې $g(x)=\sqrt{x-1}, f(x)=x^2-4$ وي، لاندې اعداد د موجودیت په صورت کې لاس ته راوړئ؟

(fog)(0) , (gof)(0) , (fog)(1) , (gof)(1) , (fog)(2) , (gof)(2)

اتمه پوښتنه: د لاندې توابعو معکوس په صورت کې په لاس راوړئ؟

$c-\frac{5}{9}(x-32)=f(x)$ G(x)=2x3 f(x)=4x+3

نهمه پوښتنه: د $y=2x-3$ تا بع ګراف رسم کړئ؟

لسمه پوښتنه: د $g(x)=\frac{4x+1}{3}, f(x)=3x^2$ توابعو په نظر کې نیولو سره دا (fog),(gof),(fof),(gog) پیدا کړئ؟

معادله

معادله د ر یاضي افاده ده چې د یوه یا څو حدونو لرونکې وي او د > , < , = علایمو په واسطه ښودل کېږي، چې د هر یوه د متحولونو د ارزښتونو په ښکاره کېدو په یادو علامو صدق کوي.

لومړۍ درجه یو مجهوله معادلې او توابع

د هغو حل او د ګراف رسمول: د دا رنګه معادلو عمومي شکل عبارت دی له y=ax+b او په دې ځای کې x مستقل متحول او y د x مربوط متحول دی او b,a ثابت عددونه او b د معادلې د ضریب په نوم او a د عمود د قاطع په نوم یادېږي. باید یادونه وشي چې پورته معادله اوله درجه خطي معادله ده، چېy دx خطي تابع ده او د هغې ګراف کولی شو د یو مستقیم خط پواسطه رسم کړو، لکه y=2x+4 دمستقیم خط. د یوې معادلې د رسمولو لپاره دوه نقطو ته ضرورت لرو چې دا دوه نقطې عبارت دي له (x,y) یعنې $Q_1(x=0,y=?)$ او $Q_2(y=0, x=?)$ د مستقیم خط د دوه نقطو په تثبیتېدو عمودي او افقي محورونو مربوط په کومو نقطو کې قطع کوي او مطلوبې دوه نقطې په y=2x+4 خطي معادله کې عبارت دي له :

فرض کوو

y =0 فرض کوو

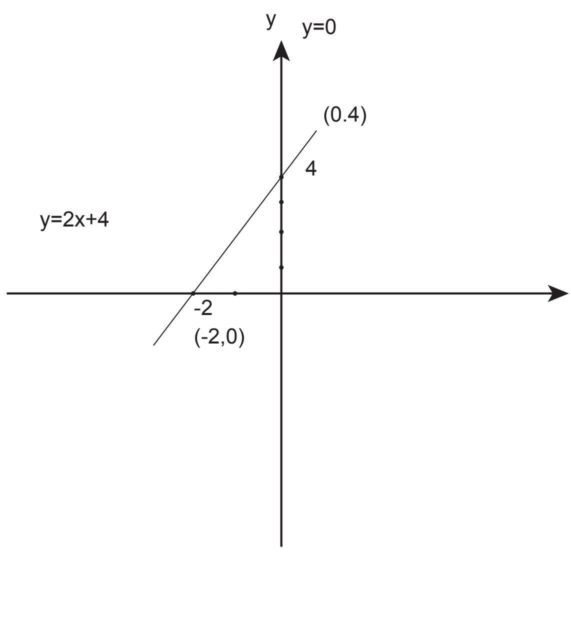
$$X = 0 \qquad y = 2(0) + 4 = 4 \Rightarrow y = 4$$

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{2}$$

$$\Rightarrow x = -2$$

$$Q_1(x = 0, y = 4)$$

$$Q_2(y = 0, x = -2)$$



دویم مثال: د y=6x+8 تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: اول x=0 فرض کوو

$$y = 6x + 8$$
$$x = 0 \Rightarrow y = 6.0 + 8 = 8$$
$$y = 0 \Rightarrow 6x + 8 = 0 \Rightarrow 6x = -8$$
$$x = \frac{-8}{6} \Rightarrow x = -1.333\overline{3}$$

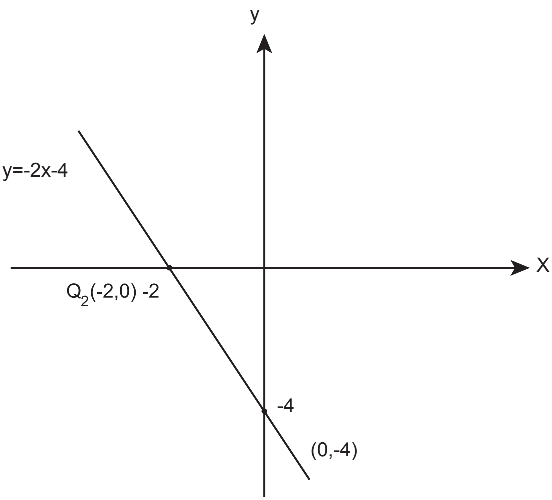
دریم مثال: د y=-2x-4 تابع ګراف رسم کړئ؟

که x=0 وي

$$y = -2(0) - 4 = -4 \Rightarrow y = -4$$
$$Q_1(x = 0, y = -4)$$
$$Q_2(x = -2, y = 0)$$

که y=0 شي

$$-2x - 4 = 0$$
$$-2x = 4$$
$$x = -\frac{4}{2} = -2$$



لومړۍ درجه دوه مجهوله معادله یا (د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم)

هغه معادلې چې مجهولونه یې دوه وي او د هر مجهول درجه یوه وي. د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په نوم یادېږي او د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم لاندې شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2+b_2y=c_2 \end{cases}$$

ځکه چې a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 ثابت عددونه او y,x مجهول دي.

او پورته سیستم د مستقیم خط معادله ده او همدارنګه باید یادونه وشي چې دوه مستقیم خطونه کولای شي موازي یا متقاطع وي. په موازي حالت کې کېدای شي یو پر بل منطبق شي ځکه نو هرې دوه معادلې یو کېږي، بنا پردې ممکنه رابطه د ضرایبو ترمنځ عبارت ده له:

$a_1b_2-a_2b_1=0$ موازي $a_1,b_2 - a_2b_1 \neq 0$ متقاطع.

د دوه مجهوله معادلو د سیستم د حل څخه هدف د (x,y) د حقیقي عددونو د جوړو ټاکل دي چې په یو وخت کې دواړه معادلې صدق کوي.

ځکه نو امکان لري دوه مستقیم خطونه یو له بل سره موازي یا متقاطع وي؛ نو د معادلو سیستم یو حل لري، په دې شرط چې د هغې خطونه یو بل قطع کړي. هغه وخت لایتناهي حل لري، که چېرې له یو بل سره موازي وي.

د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم حل بېلابېلې طریقې لري چې په لاندې ډول دي.

١- د جمع طریقه یا افنا

٢- د تساوي طریقه

٣- تعویضي طریقه

٤- د دیترمینات طریقه

٥- د متریکس طریقه

٦- د ګراف طریقه

موږ په دې ځای کې له هغو طریقو څخه چې د دیترمینانت د طریقې په نامه یا د ګرام د طریقې په نامه یادېږي معرفي کوو. د معادلو د سیستم حل د لومړني ګرامر په روش د تعریف مطابق دیترمینانت معرفي او محاسبه کوو.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2+b_2y=c_2 \end{cases}$$

۱- دیټرمینانت په لغت کې مأخذ او عامل ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو ربعي ترتیب ته دیټر مینانت ویل کېږي، لکه:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

عمودي خطونه د دیټرمینانت علامه ده. هغه اعداد چې په افقي خط کې لیکل شوي د سطر او هغه اعداد، چې په عمودي خط کې لیکل شوي د دیټرمینانت د ستون په نامه یادېږي.

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$$

$|a_1 b_1|, |a_1 b_1|$ سطرونه او ستونونه دي.

هغه دیټرمینانتونه چې دوه سطرونه او دوه ستونونه لري، د دویم ترتیب دیټرمینانت ورته وایي او که درې سطرونه او درې ستونه ولري، د درېیم ترتیب دیټرمینانت نومېږي او د a_1b_2 د ضرب حاصل اصلي قطر او د a_2b_1 ضرب حاصل فرعي قطر نومېږي. د دیټرمینانت د قیمت د پیدا کولو لپاره فرعي قطر له اصلي قطر څخه منفي کوو.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

د ګرامر په طریقه د لومړۍ درجې دوه مجهوله معادلو د سیستم حل

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2+b_2y=c_2 \end{cases}$$

په پیل کې درې دیټرمینانته ترتیب او محاسبه کوو.

۱- د y,x ضریبونه جوړه کوو او په Δ سره یې ښیو.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \Rightarrow \Delta = a_1b_2 - a_2b_1$$

۲- د Δ په دیټرمینانت کې د x د ضرایبو په عوض ثابت عددونه لیکو او په Δx یې ښیو.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \Rightarrow \Delta x = c_1b1 - c2b_2$$

۳- د Δ په دیټرمینانت کې د y ضرایبو په ځای ثابت عددونه لیکو او په Δy یې ښیو

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 \Rightarrow \Delta y = a_1c_1 - a_2c_2$$

باید وویل شي، چې y,x د $\Delta y, \Delta$ اوΔ له جنسه په لاس راځي، داسې چې $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ و $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$
د دې لپاره چې معادلې د حل لرونکې وي $\Delta \neq 0$ وي او دا شرط د مستقیمو خطونو د متقاطع کېدو دی.

لومړی مثال- د $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x-2y=-6 \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ؟
حل: اړونده دیترمینانتونه دا رنګه محاسبه کوو.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2)-1.3=-4-3=-7 \Rightarrow \Delta - 7$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2)-(-6.3)=-4+18=14 \Rightarrow \Delta X = 14$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6)-2=-12-2=-14 \Rightarrow \Delta Y = -14$$

$$\Rightarrow X = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{14}{-4} = -2 \Rightarrow X = -2$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow Y = 2$$

دویم مثال- د $\begin{cases} 2x+5y=25 \\ 3x-2y=9 \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2)-3.5=-4-15=-19 \Rightarrow \Delta = -19$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = 25(-2)-9.5=-50-45=-95 \Rightarrow \Delta X = -95$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 2 & 25 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2.9-3.25=18-75=-57 \Rightarrow \Delta Y = -57$$

په نتيجه کې:

$$X = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{-95}{-19} = 5 \Rightarrow X = 5$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{-57}{-19} = 3 \Rightarrow Y = 3$$

دریېم مثال- شل ۲۰ چرګان او سویان ۵۰ پښې لري، څو چرګان او څو سويان په دې شمېر کې شامل دي؟

حل: که فرضاً دسويو شمېر X او چرګان Y وي، د سويو د پښو شمېر 4X او د چرګانو 2Y دی؛ نو معادلې يې عبارت دي:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 50 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 1.4 = 2 - 4 = -2 \Rightarrow \Delta = -2$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 50 & 2 \end{vmatrix} = 20.2 - 50 = 40 - 50 = -10 \Rightarrow \Delta X = -10$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 4 & 50 \end{vmatrix} = 50 - 80 = -30 \Rightarrow \Delta Y = -30$$

$X = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{-95}{-19} = 5 \Rightarrow X = 5$ (د سويو شمېر)

$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{-57}{-19} = 3 \Rightarrow Y = 3$ (د چرګانو شمېر)

د درې مجهوله خطي معادلو د سيستم د حل له روش څخه يو هم دګرامر طريقه ده لکه د دوه مجهوله معادلو د حل طريقه.

د درې مجهوله خطي معادلو سيستم

د دې معادلو د سيستم عمومي حالت عبارت دی له:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + cz = d_1 \\ a_2x + b_2y + cz = d2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d3 \end{cases}$$

په دې سیستم کې لاندې ۴ دیترمینانته محاسبه کوو

$$\Delta = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right.$$

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

۲- د x د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، په Δx یې ښیو او د هغه قیمتونه پیداکوو.

$$\Delta x = \left| \begin{array}{ccc|cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array} \right.$$

$$\Delta x = d_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 d_2 b_3 - d_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 d_1 - c_3 d_2 b_1$$

۳- د y د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، پهΔ y سره یې ښیو او قیمتونه یې پیدا کوو.

$$\Delta y = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \right.$$

$$\Delta y = a_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 d_2 - d_3 a_2 c_1 - d_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 d_1$$

٤- په پورته دیترمینانت کې د 2 د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، په ZΔ یې ښیو او قیمتونه یې پیدا کوو.

$$\Delta z = a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 d_1 - b_3 d_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

په نتیجه کې د سیستم حل یا د z,y,x قیمتونه په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

څلورم مثال- د اوله درجه درې مجهوله معادلو سیستم په لاندې شکل ورکړل شوی دارنګه حل کېږي

$$\begin{cases} 4\ \ x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 4.2.2 + 1.1.2 + 2.3.3 - 2.2.2 - 3.1.4 - 2.3.1$$

$$= 16 + 2 + 18 - 8 - 12 - 6 = 10$$

$$\Rightarrow \Delta = 10$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ `10 & 3 \end{matrix} = 40 + 10 + 30 - 40 - 30 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x = 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ `10 & 3 \end{matrix} = 40 + 20 + 20 - 40 - 60 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta y = 0$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ `3 & 3 \end{matrix} = 80 + 10 + 90 - 40 - 60 - 30 = 50$$

$$\Rightarrow \Delta z = 50$$

$$z = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0\, y = \frac{\Delta y}{\Delta}\frac{0}{10} = 0$$

$$x = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{50}{10} = 5$$

په پای کې باید وویل شي، چې د سیستم حل عبارت دی له (0, 0.5)

پنځم مثال- د اوله درجه درې مجهوله معادلو سیستم په لاندې ډول درکړل شوی هغه د دیتر مینانت په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 2x+3y-2z=3 \\ 3x-2y+z=5 \end{cases}$$

حل: په پیل کې څلور دیترمینانتونو ته ترتیب ورکوو.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3+(-6)+(-4)-9-4-2=$$

$$3-6-4-9-4-2=-22$$

$$\Rightarrow \Delta = -22$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 30-10-6-15-40-3=-44$$

$$\Delta x = -44$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3-60+10-9+10-20=-66$$

$$\Rightarrow \Delta y = -66$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 135+9-40-90+6-10=-110$$

$$\Rightarrow \Delta = -110$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-44}{-22}=2\Rightarrow x=2\,y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-66}{-22}=3$$

$$\Rightarrow y=3$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-110}{-22}=5$$

$$\Rightarrow z=5$$

د دویم څپرکي پوښتنې

۱- لاندې مستقیم خطونه رسم کړئ؟

$$a)\begin{cases}3x-2y=2\\2x+y=8\end{cases}\qquad b)\begin{cases}4x-2y=7\\-2x+y=3\end{cases}$$

۲- له دیترمینانت نه په ګټه اخیستو د لاندې معادلو سیستم حل کړئ؟

$$a)\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}\qquad b)\begin{cases}-2x+3y=9\\x-y=6\end{cases}\qquad c)\begin{cases}2x+5y=25\\3x-2y=9\end{cases}$$

۳- د لاندې معادلو سیستم د ګرامر په طریقه حل کړئ؟

$$a)\begin{cases}x+y+z=2\\4x+y+4z=1\\x-3y-2y=1\end{cases}\qquad d)\begin{cases}2x-3y+2z=5\\4x+3y-2z=10\\-8x+y+z=5\end{cases}$$

$$b)\begin{cases}x+y+z=2\\10x+3y-4z=-3\\2x-2y-3z=10\end{cases}\qquad f)\begin{cases}x+2y=5\\x+3y=7\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}x+2y+20z=1\\3x+y-4z=2\\2x-3y+8z=3\end{cases}$$

درییم څپرکی

د دويمې درجې يو مجهوله معادلو حل او د هغو د ګراف رسمول

ښوليزې موخې:
لوستونکي به د اړتيا وړ مهارتونه لاسته راوړي، په قواعدو کې به په هغو اصولو باندې پوه شي چې په دوهمه درجه معادلو کې په کارېږي او بالاخره ټول مسايل به د قواعدو او د هغو فورمولونو له مخې حل کړای شي چې په دې معادلو کې تشرېح شوي دي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلين وکولای شي چې:

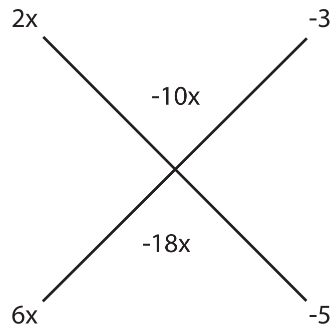
١- په ښه شکل د معادلې مفهوم درک کړي او هغه په سمه توګه تحليل او تجزيه کړای شي.
٢- مسايل د تجزيې په طريقه حل کړي.
٣- د هغې فورمول درک کړي، په ثبوت يې په سمه توګه پوه شي او مسايل له فورمول سره سم حل کړي.
٤- دويمه درجه توابع تعريف او د هغو ګرافونه د دويمې درجې يو مجهوله معادلې د قوانينو مطابق رسم کړي.
٥- اعظمي او اصغري نقطې تعريف او هغه په ګراف کې وښودلی شي.

د دويمې درجې يو مجهوله معادلو حل او د هغو د ګراف رسمول

د تجزيې په طريقه د دوهمې درجې يو مجهوله معادلو حل: د اسانه حل لپاره په پيل کې a او c تجزيه کوو او د ضربي عواملو څخه يې يوه يوه جوړه ضربي عوامل جمع کوو چې د جمعې حاصل يې له b سره مساوي شي، لکه:

$ax^2+bx+c=0$

مثال: $12x^2-28x+15=0$ تجزیه کړئ.



ضربي عوامل عبارت دي له

-18	6	-3
$\underline{-10}$	2	-5
-28		

په پای کې

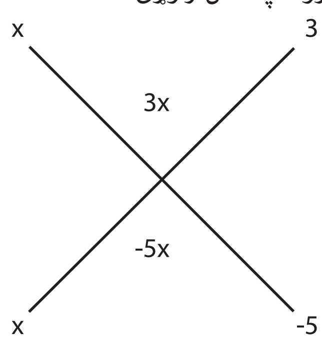
$$12x^2-28x+15=0$$

$$(2x-3)(6x-5)=0$$

$$2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$6x-5=0 \Rightarrow 6x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{6}$$

۲- مثال: د لاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ.



ضربي عوامل عبارت دي له

3	1	3
$\underline{-5}$	1	-5
-2		

$$x^2-2x-15=0$$
$$(x+3)(x-5)=0$$
$$x+3=0 \Rightarrow x_1=-3$$
$$x-5=0 \Rightarrow x_2=5$$

۳- مثال: د لاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ.

$$\sqrt{x^2-5x}=6$$
$$(\sqrt{x^2-5x})=(6)^2$$
$$x^2-5x=36 \Rightarrow x^2-5x-36=0$$

-9 4

$$(x-9)(x+4)=0$$
$$x-9=0 \Rightarrow x+4=0$$
$$x=9$$
$$x=-4$$

۴ مثال: $9x^2+3x-42=0$ $a=9=3\cdot3=1\cdot9$

$$c=-42=-6(+7)=3(-14)=-3(14)=2(-21)=-2(21)$$
$$(3x-6)(3x+7)=0$$
$$3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x_1=\frac{6}{3}=2$$
$$3x+7=0 \Rightarrow 3x=-7 \Rightarrow x_2=-\frac{7}{3}$$

له فورمول نه په استفاده د دويمې درجې معادلو حل

د دويمه درجه معادلو عمومي شکل عبارت دی له $ax^2+bx+c=0$ چې په دې ځای کې c,b,a ثابت عددونه دي. د هغې فورمول دا رنګه يا ډول ثبوتوو او د دې فورمول له مخې د پارابول اعظمي او اصغري نقطې مشخصوو.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

د معادلې اطراف په a تقسیموو

$$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=(\frac{b}{2a})^2-\frac{c}{a}$$

د معادلې له دواړو خواو سره $(\frac{b}{2a})^2$ جمع کوو.
د معادلې کینه خوا د کاملې مربع شکل ته راوړو.

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2}=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

د معادلې د اسانه حل لپاره b^2-4a په Δ(دلتا) سره ښیو، دا رابطه ممیزه، قاسمه، یا مشخصه ده او د معادلې د حل لپاره اول د Δ قیمت پیدا کوو.

مثال: $3x^2-7x+2=0$
حل کړئ.

$$\Delta=\mathrm{b}^2-4ac$$

$$\Delta=(-7)^2-4.3.2=49-24=25\Rightarrow\Delta=25$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{1,2}\frac{-(-7)\pm\sqrt{25}}{2.3}=\frac{7\pm5}{6}\Rightarrow$$

$$x_1=2$$

$$x_2=\frac{1}{3}$$

دا چې $\Delta>0$ معادله دوه جذرونه لري. $x^2-7x+12=0$

مثال: لاندې معادله حل کړئ. $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-7)^2 - 4.12.1 = 49 - 48 = 1$$
$$\Delta = 1$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{+7 \pm 1}{2}$$
$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow x_1 = 4$$
$$x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x_2 = 3$$

د دويمې درجې يو مجهوله توابع د ګراف رسمول

بايد يادونه وشي. چې په عمومي صورت کې دويمه درجه تابع په لاندې شکل ليکل کېږي.
$f(x)=ax^2+bx+c$

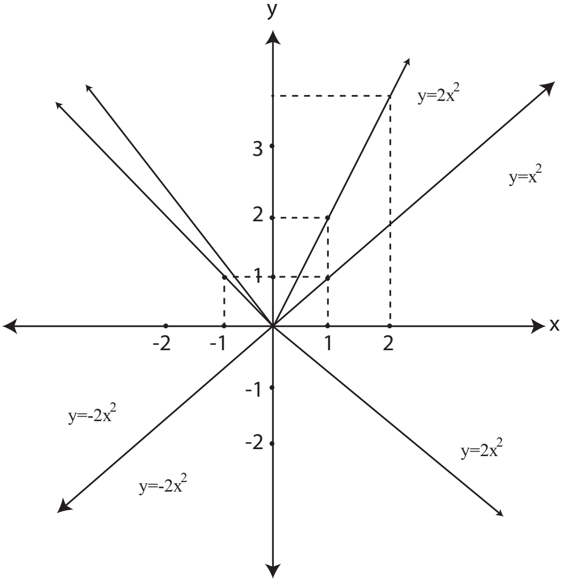
که چېرې $a \neq 0$ وي په پورته معادله کې x مستقل متحول او y د x متحول وي، x ته مختلف قيمتونه ورکوو؛ نو د y قيمتونه پيدا کوو.

مثال: د $f(x)=-6x^2+3x+12$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$f(0) = -6(0)^2 + 3.0 + 12 = 12$$
$$f(1) = -6(1)^2 + 3.1 + 12 = -6 + 3 + 12 = 9$$
$$f(-1) = -6(-1)^2 + 3(-1) + 12 = -6 - 3 + 12 = 3$$
$$f(2) = -6(2)^2 + 3.2 + 12 = -24 + 6 + 12 = -6$$
$$f(-2) = -6(-2)^2 + 3.(-2) + 12 = -24 - 6 + 12 = -18$$

مثال: د $f(x) = x^2$ $f(x) = 2x^2$ او $f(x) = -2x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x)=ax^2$ یعنی $a=1$
$f(x)=ax^2$
ځرنګه چې $a=2$ دی

2	-8
1	-2
0	0
-1	-2
-2	-8

X	Y
2	8
1	2
0	0
-1	2
-2	8

2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4

مربعي توابع

هغه توابع چې دا $f(x) = ax^2 + bx + c$ شکل ولري مربعي توابع ورته ویل کېږي، ځکه چې c,b,a ضرایب حقیقي عددونه دي.

مثال: د $f(x) = ax^2 + c$ تابع ګراف رسم کړئ، په داسې حال کې چې C=3,C=0, C=-3وي.

۱- **حل:** د C=0 په حالت کې تابع لاندې شکل اختیاروي.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y=x^2$

۲- د C=3 په نظر کې نیسو تابع لاندې شکل ځانته اختیاروي.

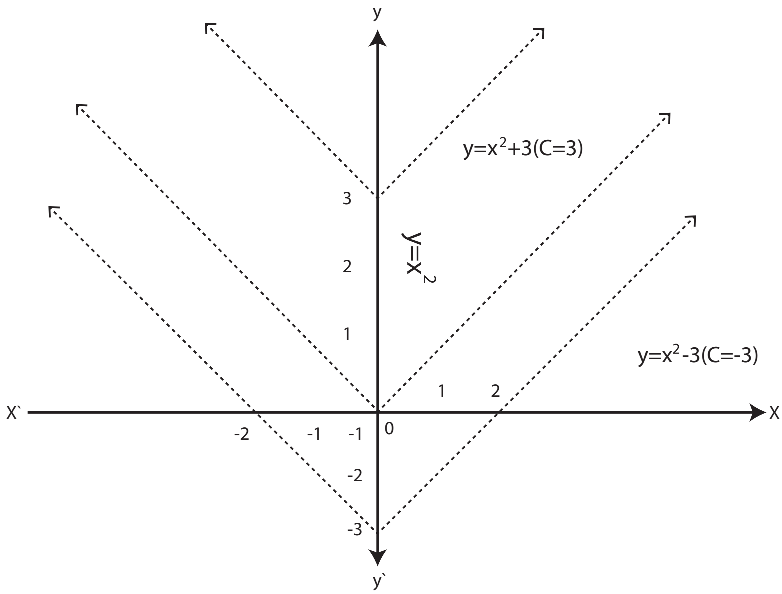
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6

$y=x^2+3$

۳- د C=-3 په نظر کې نیسو تابع لاندې شکل ځانته اختیاروي.

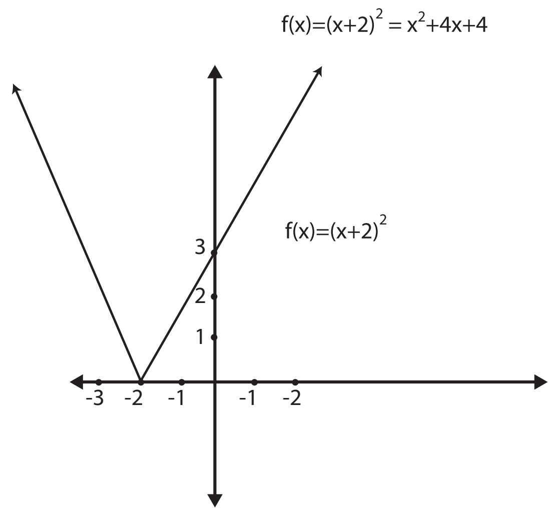
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	12	7	4	3	4	7	12

$y=x^2-3$



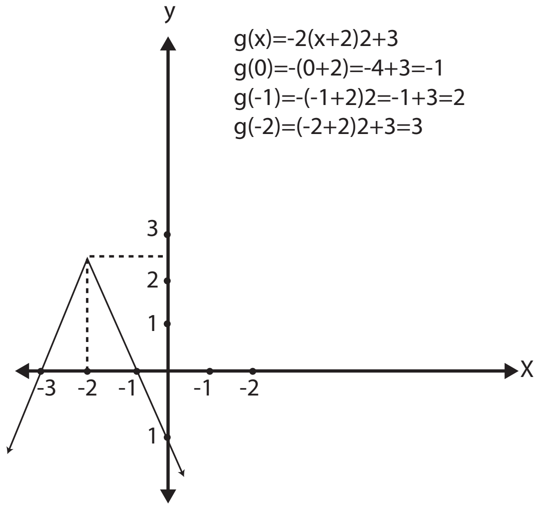
۲- مثال: د $f(x) = (x+2)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	4	9	1	6



۳-مثال: د $g(x)=-(x+2)^2+3$ تابع ګراف رسم کړئ او د هغې د مناسبو قیمتونو جدول ترتیب کړئ.

X	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	-1	2	3	2	-1



د مربعي تابع عمومي حالات

اوس $f(x)=-(x+h)^2+k$ مربعي تابع په نظر کې نیسو او معلومېږي. چې اعظمي او اصغري نقطه یې عبارت ده له (h,k) څخه چې د اعظمي او اصغري نقطې موجودیت د a په اشارې پورې مربوط دی او موږ دا $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع په نظر کې نیسو او هغه په لاندې شکل تبدیلوو.

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$$

اوس په پورته معادله کې $\frac{b^2}{4a^2}$ جمع او تفریق کوو، معادله لاندې شکل ځانته اختیاروي.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\Rightarrow a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})$$
$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})$$
$$\Rightarrow = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})$$

په نتیجه کی لرو چی:

$$\Rightarrow a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$
$$k = \frac{4ac - b^2}{4a}, h = \frac{-b}{2a}$$

او باید یاده کړو چې $h = \frac{-b}{2a}$ او $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ د $f(x)=ax^2+bx+c$ تابع لاندې شکل ځانته اختیاروي: $f(x) = a(x - h)^2 + k$

چې د دې مربوطه گراف له $y=x^2$ گراف سره مشابهت لري د $|a|$ انبساط او انقباض د ضریب لرونکی وي.

گراف د h واحد په اندازه په افقي توگه او د k واحد په اندازه په عمودي توگه انتقالېږي، د پارابول راس د (h,k) کېږي.

مثال: د $f(x) = x^2 + 4x + 2$ معادلې د پارابول راس تعین کړئ.

حل: څرنگه چې د پارابول راس عبارت له (h,k) نقطې څخه دی.

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(+4)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow h = -2$$

داسې چې:

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{8 - (-4)^2}{4} = \frac{8 - 16}{4} = \frac{-8}{4}$$
$$k = -2$$

نو ویلای شو چې د پارابول د راس نقطه عبارت ده له $(-2,-2)$ څخه.

X	-3	-2	-1	0
f(x)	-1	-2	-1	2

۲- مثال: د $f(x) = 2x^2 + 6x + 4$ پارابول د راس نقطې وټاکئ.

حل: د پارابول راس عبارت دی له (h,k) نقطې څخه، داسې چې:

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} = -1.52$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4.2.4 - 6^2}{8} = \frac{32 - 36}{8} = \frac{-4}{8} = -0.5$$

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 4$$

$$f(0) = 2(0)^2 + 6(0) + 4 = 4$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 6(-1) + 4 = 0$$

$$f(-2) = 2(-2)^2 + 6(-2) + 4 = 0$$

$$f(-3) = 2(-3)^2 + 6(-3) + 4 = 4$$

$$f(-5) = 2(-5)^2 + 6(-5) + 4 = 24$$

$$f(2) = 2(2)^2 + 6.2 + 4 = 24$$

X	-5	-3	-2	-1	0
f(x)	24	4	0	0	4

د مربعي تابع جذرونه

که تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ دارنګه راکړل شوې وي او د دې معادلې جذرونه صفري نقطې یا د $f(x)$ تابع جذرونه نومېږي، لاندې معادله کولای شو دارنګه حل کړو.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

د معادلې له دواړو خواوو سره $\frac{b^2}{4a^2}$ جمع کوو.

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a}) = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \sqrt{(x + \frac{b}{a})^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow = x + \frac{b}{a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b^2-4ac افاده په D سره ښیو، $D=b^2-4ac$ په اخري فورمول کې چې ممیزه نومیږي او لاندې حالتونه په کې شامل دي.

۱- که D>0 وي معادله دوه حقیقي او مختلف جذرونه لري.

۲- که D=0 وي معادله یواځې D<0 وي معادله حقیقي جذر نه لري، په دې ځای کې ویل کېږي، چې معادله د دوه مختلطو جذرونو لرونکې ده.

که وغواړو د معادلې حل ساده شکل ته راوړو، د $b=2b'$ یعنې $b'=\frac{b}{2}$ په نظر کې نیسو، لرو چې:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{2(-b'\pm\sqrt{b'^2-xa}}{2a}$$

$$\Rightarrow=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

په همدې ترتیب $D'=b'^2-a$ قرار لري؛ نو معادله لاندې شکل ځان ته اختیاروي:

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{D}}{a}$$

لومړی مثال: $f(x)=x^2+4x+2$ تابع د هغې د ممیزونو په مرسته حل کړئ.

$D'=b'^2-ac=2^2-1=2$ څرنګه چې 2>0 دي؛ نو د f(x) تابع دوه مختلف جذرونه لري.

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{D'}}{a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-1}}{1}=-2\pm\sqrt{4-1}$$

$$x=-2\pm\sqrt{3}$$

دویم مثال: $x^2 - 6x + 25 = 0$ معادله حل کړئ.

$$x^2 - 6x + 25 = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 36 - 100 = -64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{(64)(-(1))}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

$$x_1 = 3 + 4i$$

$$x_2 = 3 - 4i$$

دریيم مثال: دا $x^2 - 2\sqrt{3}x - 9 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: که $b' = \frac{b}{2} = -\sqrt{3}$ فرض کړو لرو چې:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1}}{1} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

د درېیم څپرکي پوښتنې

۱- $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ تابع د ساده ممیزونو په مرسته حل کړئ؟

۲- $f(x)=x^2-7x-5$ تابع حل او د هغې ګراف رسم کړئ؟

۳- د $f(x)=\frac{2}{3}+9x^3$ تابع ګراف رسم کړئ؟

٤- لاندې مربعي توابع په $p(x)=a(x-h)^2+k$ شکل ولیکئ او د هغوی ګراف رسم کړئ؟

1) $p(x)= x^2-6x+3$

2) $f(x)= x^2-5x+4$

3) $f(x)= x^2-6x-3$

4) $f(x)= -2x^2-4x+1$

5) $f(x)= -x^2+5x+1$

6) $f(x)= x^2+2x+4$

۵- د لاندې معادلو جذرونه پیدا کړئ؟

1) $x^2+10x+8 = 0$

2) $x^2-3x-4 = 0$

3) $-3x^2-9x+4 = 0$

4) $2x^2+2x+1= 0$

5) $x^2+5x-6 = 0$

٦- د لاندې معادلو جذرونه د $D=b^2-4ac$ مميزې په نظر کې نیولو حل او د هغوی گراف رسم کړئ؟

1) $x^2+5x-12 = 0$

2) $x^2-6x+25 = 0$

3) $x^2+8x+25 = 0$

4) $2x^2+2x+1= 0$

٧- د مربعي توابع د گرافونو راس معلوم کړئ؟

1) $f(x) = x^2 + 5x - 6 = 0$

2) $f(x) = x^2 - 16x + 25 = 0$

3) $f(x) = -5x^2 - 14x - 8 = 0$

4) $f(x) = 2x^2 - 9$

5) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3 = 0$

6) $f(x) = x^2 + 3$

ځلورم څپرکی

درېیمه درجه یو مجهوله معادلې او توابع

تولیزه موخه:
لوستونکي به وکړای شي، چې د درېیمې درجې معادلو مفهوم او د هغو قوانین زده کړي او د وړ مهارتونو په کارولو سره مسایل محاسبه او اړوند ګرافونه په سمه توګه رسم کړي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي وکولای شي، چې:

۱- په اساسي ډول د تجزیې مفهوم درک کړي.

۲- تجزیه تعریف او د هغې په قواعدو پوه شي او اړوند مسایل محاسبه کړي.

۳- د قایمو مختصاتو محور تعریف او د قایمو مختصاتو محور په رول کې د درېیمې درجې معادلو ګرافونه په سمه توګه رسم کړي.

٤- درېیمه درجه معادله څنګه په دوهمه درجه معادله تبدیله او د هغې ګراف رسم کړي.

درېیمه درجه یو مجهوله معادلې او توابع

د درېیمې درجې معادلو عمومي شکل عبارت دی له $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ څخه، څرنګه چې d,c,b,a ثابت عددونه او d ته عمودي قاطع ویل کېږي او درېیمه درجه تابع دا رنګه ښودل کېږي.

$$y = ax^2 + bx^2 + cx + d$$

د درېيمې درجې تابع د ګراف د رسمولو لپاره د تېرو مثالونو په څېر دوه اساسي نقطو ته ضرورت لرو، چې عبارت دي له $p_1(x=0, y=?)p_2(y=o, x=?)$ باید یادونه وشي، چې د جذرونو په موجودیت کې اسانه طریقه پیدا کړئ! د معادلې جذرونه داسې دي، د معادلې یو جذر امتحاني پیدا کوو او درېیمه درجه معادله په هغې تقسیموو، په دوهمه درجه معادله بدلېږي.

په جذرونو د پوهېدو په صورت کې جذرونه کولای شو د قوسونو د تجزیې په طریقه او یا د محمد بن موسی د فورمول په طریقه لاس ته راوړو.

مثال: غواړو لاندې درېیمه درجه تابع په نظر کې ونیسو، د هغې جذرونه پیدا او ګراف رسم کړو. $y = x^3 + x^2 - 14x - 24$

حل: که $x=0$ کړو

$$y = (0)^3 + (0)^2 - 14(0) - 24$$

$$y = -24$$

$$\Rightarrow p_1(x+0, y=?)$$

$$p(x=0, y=-24)$$

د y د ارزښت د پیدا کولو لپاره د x لپاره اختیاري قیمتونه ورکوو، چې زموږ تابع له صفر سره مساوي شي.

$$y = (4)^3 + (4)^2 - 14.4 - 24$$

$$y = 64 + 16 - 56 - 24 \Rightarrow y = 80 - 80 = 0 \Rightarrow y = 0$$

څرنګه چې په $x=4$ پورته معادله زموږ تابع له صفر سره مساوي کېږي، فلهذا د معادلې جذر $x-4$ کېږي موږ درېیمه درجه معادله په هغې تقسیموو.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - 14x - 24 & x-4 \\ \cline{2-2}
\pm x^3 \mp 4x^2 & x^2+5x+6 \\ \cline{1-1}
5x^2 - 14x & \\
5x^2 \mp 20x & \\ \cline{1-1}
6x - 24 & \\
\pm 6x \mp 24 &
\end{array}
$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (5)^2 - 4.1.6$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$\Delta = 1$$

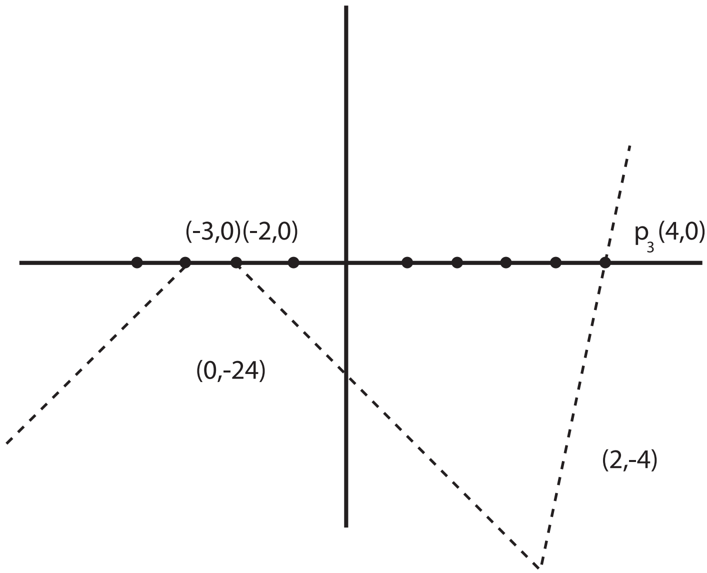
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 \pm 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$x_2 = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow x_2 = -3$$

اوس د ګراف د رسمولو په خاطر د جدول نه په ګټه اخیستو x ته قیمت ورکوو او د y قیمت په لاس راوړو، وروسته د جدول له مخې ګراف رسموو.



x	y
4	0
3	-30
2	-40
1	-36
0	-24
-1	-10
-2	0
-3	0
-4	-16

دويم مثال: د $y = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ تابع ګراف رسم کړئ.

f1(x=0,y=?)

f1(x=0,y=12)

د x لپاره اختياري قيمتونه ورکوو، چې تابع له صفر سره مساوي شي.

$$Y = (1)^3 - 2(1)^2 - 11(1) + 12$$

$$Y = 1 - 2 - 11 + 12 = 0 \Rightarrow y = 0$$

څرنګه چې x=1 تابع د صفر سره مساوي کېږي، ځکه نو د معادلې يو جذرx-1 کېږي او درېيمه درجه معادله په هغې تقسيموو.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x - 1} = x^2 - x - 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

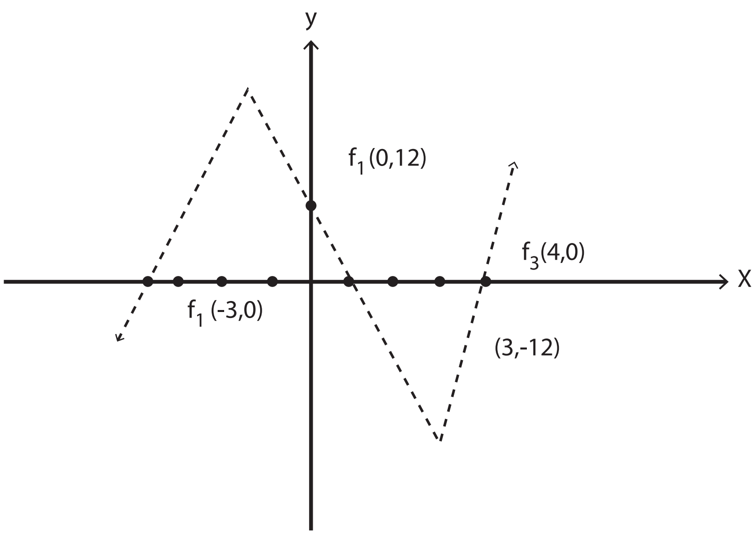
$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f_2(y = 0, x = 4, -3)$$

د ګراف جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو.

x	y
4	0
3	-12
2	-10
1	0
0	12
-1	20
-2	18
-3	0



د څلورم څپرکي پوښتنې

د y,x په محور د اړوند منحني د تقاطع نقطې پیدا کړئ او د هغو ګراف رسم کړئ؟

$1)\, y = 2x^2 + x^3 - 10x - 20$

$2)\, y = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

$3)\, y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$

$4)\, y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$5)\, y = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

$6)\, y = x^2 - 8x^2 + 2x + 5$

$7)\, y = 4x^5 + 6x^4 + 4x + 6$

$8)\, y - x^3 = -3x^2 + -10x + 24$

$9)\, y + 2x^2 = x^3 - 2x + 1$

پنځم څپرکی

لوګارتم

ټولیزه موخه:
په سمه توګه د لوګارتم او توان لرونکې تابع درک او د لوګارتم او توان لرونکې تابع تر منځ په اړیکو پوهېدنه، د محاسبې په کارونو کې د اړتیا وړ مهارتونو لاسته راوړل او د لوګارتم له اصولو او قواعدو سره سم د اقتصادي مسایلو حل او د لوګارتم له جدول نه په ګټه اخیستو سره د هغو د لوګارتم پیداکول.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي وکولای شي، چې:

۱- لوګارتم تعریف او د هغه اړوندې پو ښتنې حل کړي.
۲- د توان لرونکې تابع او لوګارتم ترمنځ رابطه تعریف او مسایل په سمه توګه محاسبه او حل کړي.
۳- د لوګارتم قواعد ښه درک کړي او اړوندې پوښتنې د قواعدو مطابق حل کړي.
٤- د لوګارتم ډولونه، انتي لوګارتم او کولو لوګارتم سم وپیژني او د هغو اړوندې پوښتنې حل کړي.
٥- په بېلابېلو ساحو کې له لوګارتم څخه ګټه اخیستل درک کړي او د هغه اړوندې پوښتنې حل کړي.

توان لرونکې او لوګارتمي توابع

هغه توابع چې د جمعې ،ضرب او د تقسیم د عملیو په واسطه یې عددونه او متحولین معلوم شي، الجبري توابع دي.

هغه توابع چې الجبري وي متعالي توابع ورته ویل کېږي.

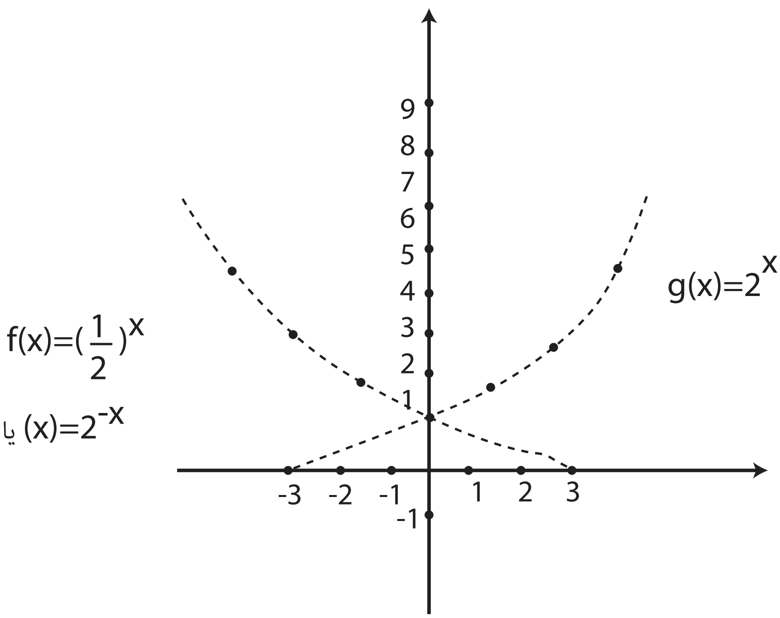
باید وویل شي چې توان لرونکي توابع او لوګارتمي توابع یو د بل معکوس دي او د توان لرونکو توابعو له خواصو څخه په محاسبه او د نفوسو د تکثر، د مکروبونو تکثر او د رادیو اکتیف عناصرو د وړانګو په وړاندوینه او نورو کې ګټه اخېستل کېږي.

د لوګارتمي توابعو څخه په پېچلو محاسبوکې ډېره ګټه پورته کېږي.

توان لرونکې توابع(اکسپوتنشیل): کله چې a یو خلاف د ۱ مثبت عدد وي، د $f(x)=a^x$ تابع د توان لرونکي توابع په نامه په قاعده da نومېږي.

مثال: د $g(x)=2^x, f(x)=(\frac{1}{2})^x$ توابع په نظر کې نیول شوي د هغوی ګراف رسم کړئ.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$



د توان لرونکو توابعو خاصیتونه

کله چې a یو مثبت عدد وي او $f(x)=a^x$ وي لاندې شرایط صدق کوي.

۱- د f(x) تابع متزایده وي، په دې شرط چې a>1 وي.

۲- د f(x) تابع متناقصه وي په هغه وخت کې چې a<1 وي.

۳- د f(x) تابع په هغه صورت کې، چې a=1 ثابته ده.

٤- د $y=a^x$ ګراف په حالت کې له (1،0) نقطې تېرېږي.

٥- د ټولو حقیقي عددونو لپاره x او y لرو چې:

$$f(x+y)=a^{x+y}=a^x\times a^y=f(x)\,f(y)$$

$$f(x-y)=a^{x-y}=a^x\times a^{-y}=\frac{a^x}{a^y}=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a.x)=a^{a.x}=(a^x)^a=(f(x))^a$$

مثال: د $f(x)=3^{-x^2}$ ګراف رسم کړئ.

حل:

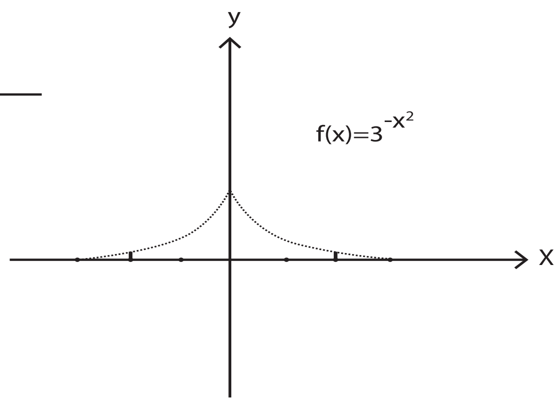
$$f(0)=3^{-0}=1$$

$$f(x)=3^{-x^2}$$

$$f(1)=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

$$f(2)=3^{-(2)^2}=3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}$$

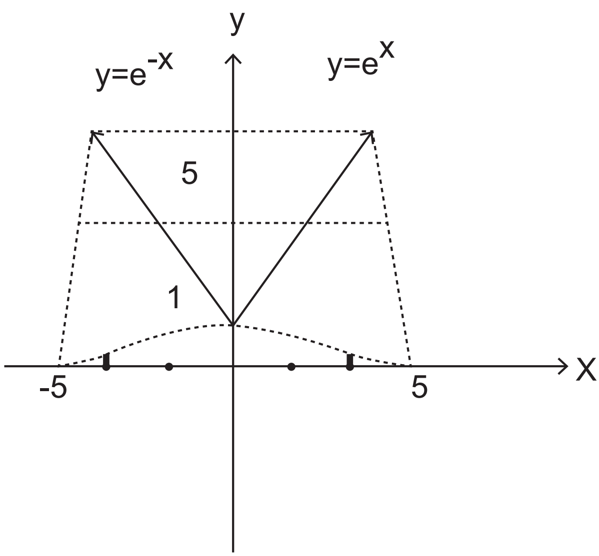
X	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{81}$



$$1)\exp_a{}^0 = 1, \exp(1) = a$$
$$2)\exp_a(x+y) = \exp_a(x), \exp(y)$$
$$3)\exp_a(x-y) = \frac{xp_a(x)}{\exp_a(y)}$$
$$4)(\exp \propto^{(y)})^{\propto} = \exp_a(\propto .x)$$

او همدارنګه باید یادونه وشي، چې د $\exp_a(x)=a^x$ خواص په لاندې ډول هم لیکل کېږي.

یو له فوق العاده مهمو عددونو څخه په ریاضي کې د اویلر عدد دی، چې $e=2,7182818284...$ دی او د $f(x)=e^x$ تابع دی، یعنې $\exp(x)=e^x$ چې دا تابع د نفوسو په زیاتوالي، او مرکبې ربعې او نورو مسایلو کې کارېږي او د $y=e^x$ ګراف له $y=2^x$ ګراف سره ورته رسمېږي.



او د e^x تابع ټول خواص د a^x تابع سره مشابه دي.

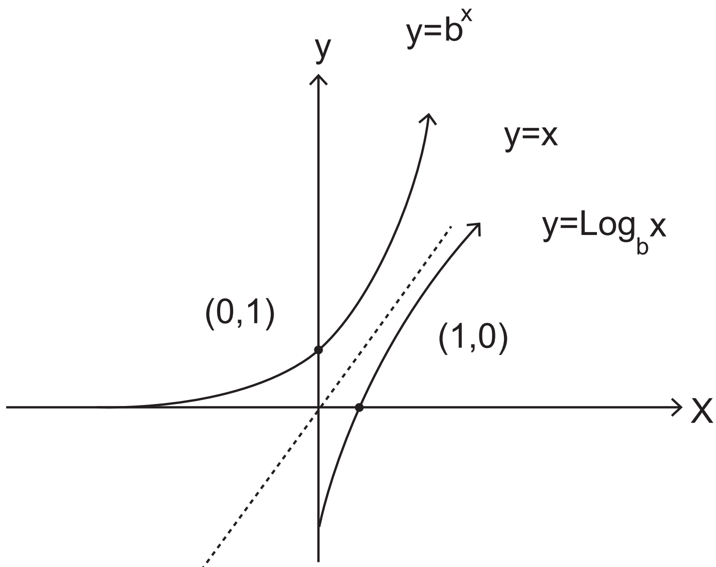
$$e^0 = 1$$
$$e^x . e^y = e^{x+y}$$
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

او د هر حقیقي عدد لپاره x $y=e^x$ متزایده او $y=e^{-x}$ متناقصه وي.

لوګارتم او د لوګارتم توابع: هر کله چې $x=b^y$ او $0<b\neq 1$ وي د y عدد د x لوګارتم په قاعده د b ويل کېږي او په لاندې شکل ليکل کېږي $y=Log_b^x$ يعنې دوه فوق الذکر عبارتونه يو د بل معادل دي.

$$x = b^y \Leftrightarrow y = \log_b^x$$

يا په بل عبارت $f(x) = b^x$ او $f^{-1}(x)\log_b^x$ توابع د يو بل معکوس دي.



د توان لرونکو او لوګارتمي توابعو ترمنځ اړيکه

څرنګه چې توان لرونکې توابع $f(x) = a^x$ او $f^{-1}(x)Loga^x$ د يو بل معکوس دي.
نو

$$\Rightarrow_a \log_a^x = x, \log_a^{a^x} = x$$

$$_a\log_a^{a^x} = f^{-1}(f(x) = x$$

$$_a\log_a^{a^x} =_x \log_a^{a^x} = x$$

مثال:

$$1)8=2^3 \Leftrightarrow Log2^8=3$$

$$2)16=2^4 \Leftrightarrow Log2^{16}=4$$

$$3)8=(\frac{1}{2})^{-3} \Leftrightarrow Log^8_{1/2}=-3$$

$$4)10000=10^4 \Leftrightarrow Log^{10000}_{10}=4$$

$$5)1000=10^3 \Leftrightarrow Log^{10000}_{10}=3$$

$$6)0.0001=10^{-4} \Rightarrow Log^{0.0001}_{10}=-3$$

$$7)0.00001=10^{-5} \Rightarrow Log^{0.00001}_{10}=-5$$

د لوګارتم قواعد یا د لوګارتم خاصیتونه: د طاقت د قوانینو نه په ګټه اخیستو په اسانۍ سره لوګارتم مطالعه کولی شو.

$$1)Log^1_a=0 \Rightarrow 1=a^0$$

$$2)Log^a_a \Rightarrow a=a^1$$

$$3)Log^{(y,x)}_a=Log^x_a+Log^y_a$$

د ضرب د حاصل لوګارتم د جمع د حاصل د مجموعي لوګارتمونو سره مساوي دی.

ثبوت: فرضوو چې:

$$\begin{cases}\log^x_a=u \Rightarrow x=a^u\\ \log^y_a=v \Rightarrow y=a^v\end{cases}$$

د مساوات دواړه خواوې سره ضربوو.

$$x.y=a^u.a^v$$

$$\Rightarrow x.y=a^{u+v} \Rightarrow Log_a(x\cdot y)=u+v$$

د v,u قیمت په پورته رابطه کې وضع کوو، په نتیجه کې:

$$Log_a^{(x.y)} = Log_y^x + Log_a^y$$

$$4) Log_a^{\frac{n}{y}} = Log_a^x - Log_a^y \Rightarrow Log_a^{\frac{x}{y}} = Log_a^x - Log_a^y$$

د ضرب د حاصل لوګارتم مساوي وي د مربوطو لوګارتمونو د جمعې له حاصل سره.

ثبوت: داسې يې حل کوو، فرض کوو چې:

$$\begin{cases} \log_a^x = u \Rightarrow a^4 \\ \log_a^y = v \Rightarrow a^v \end{cases}$$

څرنګه چې پورته معادله خوا په خوا تقسيموو لرو چې:

ثبوت: فرض کوو چې

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{u-v}$$

$$Log_a^{(\frac{x}{y})} = u - v$$

د پورته معادلې دواړه خواوې د a په توان پورته وړو.

$$5) Log_a^{x^a} = a.Log_a^x$$

$$Log_a^x = u \Rightarrow x = a^u$$

$$x^a = (a^u)^a$$

$$x^a = a^{u.a} \Rightarrow Log_a^{x^a} = a.u$$

$$\Rightarrow Log_a^{x^a} = a.Loga^x$$

۶) د يو عدد د جذر لوګارتم مساوي دى د جذر د معکوس د ضرب د حاصل د مربوطه عدد په لوګارتم

$$6) Log_a^{a\sqrt{x}} = \frac{1}{a}.Log_a^x$$

$$= Log_a^{x^{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{a} Log_a^x$$

$$7) Log_a^x.Log_b^a = Log_b^x$$

ثبوت: فرض کوو

$$\begin{cases} \log_a^x = u \Rightarrow a^u \\ \log_b^a = v \Rightarrow a^v \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = b^{v.u} \Rightarrow Log_b^x = v.u$$

$$\Rightarrow Log_b^x = Log_a^x.Log_b^a \Rightarrow Log_a^x.Log_b^a = Log_b^x$$

مثالونه:

$$1) Log_2^{18} = Log_2^{(2.9)} = Log_2^2 + Log_2^9 = Log_2^2 + Log_2^{(3)^2}$$

$$= 1 + 2.Log_2^3$$

$$2) Log_2^{128} = Log_2^{(2)^7} = .Log_2^2 = 7.1 = 7$$

$$3) Log_b^4 + Log_b^x - Log_b^3 = Log_b^{(4.x)} - Log_b^3 = Log_b^{\frac{4x}{3}}$$

$$4)\ Logb_2^{\sqrt{11}} = Log_b^{(11)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot Logb_2^{11}$$

پنځم مثال- د x قیمت په لاندې لوګارتمي معادله کې پیداکوو

$$Log_{10}^{[(x-21)x]} = 2 \Rightarrow (x-21)x = 10^2$$

$$x^2 - 2x = 100 \Rightarrow x^2 - 21x - 100 = 0$$

$$(x-25)(x+4) = 0$$

$$x - 25 = 0 \Rightarrow x = 25$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

شپږم مثال- د x قیمت له لاندې لوګارتمي معادلې څخه په لاس راوړئ.

$$Log_{10}^x + Log_{10}^4 = 2 \Rightarrow Log_b^{(4.x)} = 2$$

$$4x = 10^2 \Rightarrow 4x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{4} = 25$$

$$\Rightarrow x = 25$$

اووم مثال- $Log_4^{(x+2)^2}=2$ لوګارتم که چېرې x=2 وي د هغې ارزښت پیدا کړئ.

$$Log_4^{(x+2)^2}=2$$
$$(x+2)^2=4^2$$
$$(2+2)^2=4^2$$
$$4^2=4^2$$

د لوګارتم ډولونه

د لوګارتم ډول د هغه په قاعدې پورې اړه لري. د لوګارتم قاعده کولای شي منفي یا مثبت لایتناهي عددونه په بر کې ونیسي، څرنګه چې د لوګارتم ډولونه ډېر دي او موږ یواځې دوه ډوله لوګارتم در پېژنو.

۱- طبیعي لوګارتم

۲-معمولي لوګارتم (اعشاري)

په دې لوګارتم کې د ۱۰عدد د قاعدې په حیث په نظر کې نیول شوی دی او معمولاً په دې شکل ښودل کېږي $Logx=Log_{10}^{x}$ له دې ډول لوګارتم څخه په اقتصادي او سوداګریزو مسایلو کې ګټه اخیستل کېږي.

مانتیس او د لوګارتم مشخصه

دN هر مثبت عدد کولای شو په علمي شکل په لاندې ډول ولیکو.

$N=a.10^c$ داسې چې $1\le a<10$ وي او C یو تام عدد دی، په دې ځای کې کولای شو ولیکو: (کرکترستیک)

$$LogN=Log(a.10^{c})=Loga+Log10^{c}$$
$$=Loga+c.Log10=Loga+a$$

په دې مثال کې د c عدد ته مشخصه(کرکترستیک) وایي، همدارنګه لیکلای شو، چې M=Loga او Loga د LogN مانتیس نومېږي، څرنګه چې $0\le a<1$ دی

نو $1 > a \leq 0$ دی، یعنې $0 \leq m < 1$.

لومړی مثال-

$$Log(527) = Log(5,27)x10^2 = Log(5,27) + Log_{10}^{2}$$
$$= Log(5,27) + 2$$

له دې مثال څخه څرګندېږي چې C=2 دی یعنې مشخصه ۲ ده او $m = Log^{(5,27)}$ دی.

دويم مثال-

$$Log(950000) = Log\left[(9.5)x10^5\right] = Log(9.5) + Log10^2$$
$$= Log(9.5) + 5 \Rightarrow c = 59m = Log(9.5)$$

دريیم مثال-

$$Log(0.000005) = Log\left[5x10^{-6}\right] = Log5 - 6$$
$$\Rightarrow C = -6, m = Log5$$

څلورم مثال-

$$Log(1000) = Log10^3 = 3.Log10 = 3$$
$$\Rightarrow C = 3m = 0$$

د مانتيس او مشخصې خاصيتونه

۱. د لوګارتمونو مانتيس هغه عددونه دي چې د عین رقمونو او ترتیب لرونکي وي پرته د اعشاري علامو د موقعيت په نظر کې نیولو، ښي او کیڼ صفرونه د یو بل سره مساوي وي.

د مثال په توګه $Log(4,81) = 0.6821$ (1-) وي.

لومړی مثال:

$$Log(48100) = Log[(4,81)x10^4]$$
$$= Log(4,81) + Log10^4 = Log(4,81) + 4$$
$$= 0.6821 + 4 = 4.6821 \Rightarrow Log^{(48100)} = 4.6821$$

$$Log(481) = Log[(4,81)x10^4]$$
$$= Log^{(4,81)} + Log10^2 = Log^{(4,81)} + 2 = 0.6821 + 2 = 2.6821$$

$$= Log(0.00481) = Log[(4,81)x10^{-3}] =$$
$$= Log^{(4,81)} + Log10^{-3} = 0.6821 - 3 = \overline{3}.6821$$

$$Log(0.0481) = Log[4,81)x10^{-2}] =$$
$$= Log^{(0.0481)} + Log10^{-2} = 0.6821 - 2$$
$$\Rightarrow Log^{(0.0481)} = \overline{2}.6821$$

اوس د پورته پوښتنو نتیجې یوځای کوو.

عدد	مشخصه	مانتیس	لوګارتم
48100	4	0.6821	4.6821
481	2	0.6821	2.6821
81,۴	0	0.6821	0.6821
0.0481	-2	0.6821	-2.6821
0.00481	-3	0.6821	-2.3179

۲. د لو ګارتم کرکترستیک له یو نه لوی، یو واحد کوچنی د هغو د صحیح رقمونو له شمېر څخه وي، لکه:

اعداد	128	9682	5942.5	200000
مشخصه	2	3	3	5

۳. د لوګارتم مشخصه له يو څخه کوچنۍ ، يو منفي عدد دی، چې يو واحد کوچنی د چپ طرف د عدد د صفرونو له شمېر څخه د هغې نه مخکې عدد اعشاري وي لکه:

واحد	0.128	0.081	0.00481	0.00065
مشخصه	-1	-2	-3	-4

نوټ: د لو ګارتم مشخصه د عددونو د شمېر له مخې معلومېږي.

او مانتيس د جدول له مخې په لاس راځي، مثلاً د يو درې رقمي عدد مانتيس په لاندې شکل معلومېږي لکه 943 عدد د 94 په سطر کې او د 3 په ستون کې د هغه مانتيس واقع دی.

انتي لوګارتم

د هر عدد انتي لوګارتم خپل لوګارتم دی.

هر کله چې $y=Logx$ وي، په دې صورت کې $x=10^y$ او $x = 10^y = antiLogy$ دی، دا چې د $Log92.8=1.9675$ لوګارتم دی د ۹۲,۸ عدد انتي لوګارتم ۱,۹۶۷۵عدد يادېږي.

اول مثال: $\text{Log}\,1000 = 3 \Rightarrow \text{antiLog} = 10^3 = 1000$

دويم مثال: $LogN=1.7016$

ځکه نو $m=0.7016$ او $C=1$ بنا پردې د صحيح رقمونو شمېر د N عدد مشخصې ته په کتو بايد 2 وي، څرنګه چې د 0 او7016 مانتيس د 503 عدد مربوط دی؛ نو بايد چې $N=50.3$ وي.

يادونه: که د يوه عدد لوګارتم ټاکلی وي، د صحيح رقمونو شمېر او يا د اعشاري علامې موقعيت ټاکل د عدد د مشخصې په مرسته او د عدد د رقمونو څرنګوالی د مانتيس په مرسته له جدول څخه په لاس راځي.

دریيم مثال-

LogN=-2.3179

په دې صورت کې

LogN=-2.3179=-2-0.3179

=-2-1+1-0.3179=-3+0.6821

دا چې د m=0.6821 ا و C=-3 دی او د 0.6821 عدد د مانتیس په جدول کې د 481 عدد دی، باید یادونه وشي چې د N مشخصه -3 عدد دی، په نتیجه کې N=0.00481 دی.

د لو ګارتم د قاعدې د بدلولو لپاره فورمول

هر کله چې x,b,a مثبت عددونه وي او a او b د یو خلاف وي؛ نو لرو چې:

$$Log_b^x = \frac{Log_a^x}{Log_a^b}$$

ثبوت: فرض کوو چې $y = Log_b^x$ وي $b^y=x$ دی، دواړه خواوو ته د a په قاعده لوګارتم نیسو.

$$= Logb_b^y = Log_b^x$$

$$y \times Logb_a^b = Log_b^x$$

$$y = \frac{Log_b^x}{Logb_a^b} \Rightarrow Log_b^x = \frac{Log_b^x}{Logb_a^b}$$

مثال: د Log_9^{27} محاسبه کړئ.

حل:

$$Log_9^{27} = \frac{Log_3^{27}}{Log_3^9} = \frac{Log_3^{3^3}}{Log_3^{3^2}} = \frac{3.Log_3^3}{2.Log_3^3} = \frac{3.1}{2.1} = \frac{3}{2} \Rightarrow Log_9^{27} = \frac{3}{2}$$

دويم مثال: د Log_5^{100} محاسبه کړئ.

که چېرې $Log_{10}^5 = 0.7$ وي.

حل:

$$Log_5^{100} = \frac{Log_{10}^{100}}{Log_{10}^5} = \frac{Log_{10}^{(10)^2}}{Log_{10}^5} = \frac{2.Log_{10}^{10}}{Log_{10}^5} = \frac{2\times1}{0,7} = \frac{2}{0,7} = 2.86 \Rightarrow Log_5^{100} = 2,86$$

خطي انتر پوليشن

باید یادونه وشي چې د درې رقمي او څلور رقمي عدد مانتيس د درې رقمي او څلور رقمي جدول څخه پيدا کولای شو. که چېرته د يو عدد د رقمونو شمېر د درې او څلورو څخه زيات وي، نشو کولای چې مانتيس يې د جدول له مخې پيدا کړو، بايد يادونه وشي چې دلته لوګارتمي تابع متزايده وي او د هغې قيمتونه د کوچنيو انتروالونو څخه په خطي توګه زياتوالی مومي، همدارنګه د عددونو او د هغوی د لوګارتمونو ترمنځ توپير مستيقماً متناسب فرض کولای شو، دې ته په کتو د عددونو د مانتيس د محاسبې د روش فرضيه شتون لري، چې د خطي انتر پوليشن په نوم يادېږي.

مثال: د 5,235 عدد مانتيس ديو درې رقمي جدول څخه د پيدا کېدو وړ نه دی، مګر دوه درې رقمي عددونه کولای شي معلوم يې کړي، چې دا عدد د هغو دواړو تر منځ واقع وي 5,23<535<5,234 په دې صورت کې د لوګارتمونو مانتيس 5,23 او 5,24 په جدول کې موجود دی، چې لاندې يې محاسبه کوو.

$$N: \quad 0,010\left\{\begin{array}{l}5,230\\5,235\\5,240\end{array}\right\}0,0\ 05 \qquad\qquad LogN: \quad \left\{\begin{array}{l}0,7185\\x\\0,7193\end{array}\right\}0,0008$$

د اعدادو توپير	د لوګارتم توپير
0,01	0,0008
0,005	D

$$\frac{0,01}{0,005} = \frac{0,0008}{d} \Rightarrow 0,01d = (-,00d)(0,0008)$$

$$\Rightarrow d = \frac{(0,005)(0,0008)}{0,01} = 0,0004$$

$$\Rightarrow x = Log5.235 = Log5.235 + d = 0,7185 + 0,0004 = 0,7189$$

که د 52350 عدد د لو ګارتم مانتيس پيد اکول هدف وي، بيا هم پورته روش په کار وړل کېږي ځکه چې د 3,235 او 52350 عددونو مانتيس مساوي دی او همدارنګه بايد وويل شي، چې د انتي لوګارتم د ټاکلو لپاره د پورته په شان مشابه روش په کار وړل کېږي او همدارنګه دانتې لوګارتمونو توپير لټول کېږي.

مثلاً که LogN=1,7206 وي N وټاکي، بايد وويل شي د 0,7206 عدد مانتيس په درې رقمي جدول کې شتون نه لري او مانتيس له جدول څخه کولای شو پيدا کړو، چې پورته ذکر شوی مانتيس د هغوی په منځ کې واقع دی، يعنې 0,7202 د دې سره تعلق 0.7210 5.250,لري او د 5.260 متعلق دی دارنګه يې حسابوو.

$$\text{LogN} \qquad 0{,}010\begin{Bmatrix} 5{,}250 \\ y \\ 5{,}260 \end{Bmatrix} d \qquad\qquad \text{N} \qquad 0{,}0004\begin{Bmatrix} 0{,}7202 \\ 0{,}7206 \\ 0{,}7210 \end{Bmatrix} 0{,}0008$$

دعددونو تفاوت	د لوګارتم تفاوت
0,0004	d
0,0008	0,01

$$\frac{d}{0{,}010} = \frac{0{,}0004}{0{,}0008}$$

$$\Rightarrow d = \frac{(0{,}010)(0{,}0004)}{0{,}0008} = 0{,}005$$

$$y = 5{,}250 + d = 5{,}250 + 0{,}005 = 5{,}255$$

مثال: Log 0,0007957 پيدا کړئ.

$$Log 0{,}0007957 = Log(7{,}957).(10^{-4}) = Log 7{,}957 + Log 10^{-4}$$
$$= Log 7{,}957 - 4 = m - 4$$

او دا چې m=Log 7,957 دی.

7,96>7,957>7,95 نو د مانتيسونو د جدول په کمک يې پيدا کوو.

N	LogN
$0{,}010\begin{cases}5{,}250\\ y\\ 5{,}260\end{cases}\Big\}d$	$0{,}0004\begin{cases}0{,}7202\\ 0{,}7206\\ 0{,}7210\end{cases}\Big\}0{,}0008$
دعددونو تفاوت	د لوګارتم تفاوت
0,007	50,000
0,010	d

$$\frac{0{,}01}{0{,}007}=\frac{0{,}0005}{d}$$

$$\Rightarrow d=\frac{(0{,}007)(0{,}0005)}{0{,}010}=0{,}00035\approx 0{,}0004$$

$$m=0{,}9008\Rightarrow Log0{,}0007957=0{,}9008-4$$

$$\Rightarrow Log0{,}0007957=\overline{4}{,}9008$$

کو لوګارتم: د یوه عدد معکوس لوګارتم د هغې عدد کو لوګارتم دی.

مثال:a یوعدد او $\frac{1}{a}$ د a معکوس دی د $\frac{1}{a}$ لوګارتم د a کو لوګارتم دی.

$$coLog=Log\frac{1}{a}$$
$$coLog=Log1-Loga\Rightarrow coLoga=0-Loga$$
$$coLoga=-Loga$$

یا دا چې د یوه عدد منفي لوګارتم د هغه عدد کو لوګارتم دی.

د جدول نه په ګټه اخېستو د لوګارتم پیدا کول: څرنګه چې په حسابي معاملاتو لکه مرکبه ربع د 10 په قاعده لوګارتم زیات د ګټې اخېستو وړ دی، د عددونو مشخصه د تامو عددونو له مخې معلومېږي او مانتیس د جدول له مخې پیدا کېږي، د لاندې مثال په څېر:

1- Log 397 پیدا کړئ.

حل: $397=3{,}97.10^2$ دی؛ نو لرو چې:

$$Log397=Log(3{,}97.10^2)$$
$$=Log3{,}97+Log10^2$$
$$=Log3{,}97+2$$

او Log 3,97 د جدول له مخې پیدا کوو.

N	
1.0	0000 0093 0086 0128 0170 0212 0253 0294 0334 0374
3.5	5441 5453 5456 5478 5490 5502 5514 5527 5539 5561
3.6	
3.8	
3.9	
4.0	
4.1	
4.2	
4.3	
4.4	

کینې خواته دوه رقمونه 3.9 په N ستون کې او ۷ عدد په N سطر کې پیداکوو، د 3.9 سطر په تقاطع کې د ۷مربوط ستون کې قرار لري. د 3.97 له لوګارتم څخه عبارت دی په جدول کې لیدل کېږي، چې Log 3.97=0.5988 دی؛ نو:

Log397=Log3.97+2=0.588+2=2.5988

دویم مثال- Log 0.0429 محاسبه کړئ.

$$\text{Log}\,0.0429 = \text{Log}(4.29\,.10^{-2}) = \text{Log}4.29 + Log10^{-2} = \text{Log}4.29 - 2$$

د 4.29 لوګارتم د 4.2 په منځ کې د N په ستون کې د N۹ مربوط سطر کې پیدا کوو او مطلوب عدد په لاس راځي، یعنې $\text{Log}^{\,4.29} = 0.6325$ دی څکه نو داسې لیکلای شو چې

$$\text{Log}\,0.0429 = \text{Log}4.29 + (-2) = 0.6325 - 2$$

دریيم مثال- د Log 24 لوګارتم محاسبه کړئ!

حل:

$$Log\,24 = Log(2.4x(10))$$

$$Log\,24 = Log(2,4) + Log10 \Rightarrow Log\,2.4 + 1$$

$$\Rightarrow Log\,24 = Log\,2.4 + 1$$

دا چې 2.4=2.40 دی؛ نو Log 2.40 وي او Log 2.4 له جدول څخه د 2.4 مربوط سطر کې او مربوطه ستون په (0) پیدا کوو، چې عبارت دی له 0.3802څخه.

$$\Rightarrow Log\,24 = Log\,2.4 + 1 = 0.3802 + 1$$

$$\Rightarrow Log\,24 = 1.3802$$

طبيعي لوګارتم

طبيعي لوګارتم چې په هغه کې قاعده د اويلر عدد (e=2.718281...) په نظر کې نيول کېږي د قضيو د اثبات لپاره او د رياضي تيورۍ له دې څخه محاسبات، ليمت او مشتق ډېر استعمال لري

او عبارت دی له: $Inx = Loge^{x}$

او همداراز $e^{Inx} = x, Ine^{x} = x$

لومړی مثال- لاندې لوګارتم ...e=2.718281 محاسبه کړئ.in=(e.e.e)

څرنګه چې $e.e.e=e^3$ دی

$$In(e.e.e)=Ine^3=3$$

دويم مثال- $In\, {}^{1}\!/_{e.e}$

حل: $= In\frac{1}{e^2} = Ine^{-2} = -2$

د اعشاري او طبيعي لوګارتمونو ترمنځ رابطه

که x,b,a مثبت عددونه او b,a د يوه خلاف وي، په نظر کې د دې دوه لوګارتمونو د قاعدو ګراف ځينې وخت د e,10 عددونو څخه لرو، چې

$$Log_a^x = Log_b^x . Log_a^b$$

د يادونې وړ ده له محاسبو څخه په لاس راځي چې Loge=0.434294

او...In10=2.302584 دی؛ نو Logx=0.4343.Inx او يا

$$Log_a^x . Log_b^a = Log_b^x$$

$$Log_{10}^x . Log_e^{10} = Log_e^x \Rightarrow Logx.In10 = Inx$$

$$nx = 2.3026.Logx$$

د دې دوه فورمولونو په درلودلو کولای شو د e له قاعدې څخه د 10 قاعدې ته او د 10 له قاعدې څخه د e قاعدې ته لاړ شو.

لومړی مثال In 4.69 پیداکړئ.

حل: لرو چې$In4.69=2.3026.Log4.69$ دا چې $Log\ 4.69=0.6712$ دی؛ نو لرو چې:

$In\ 4.69=2.3026\ .\ 0.6712=1.5455$

دویم مثال- In8910 پیدا کړئ.

$$In9810 = 2.3026.Log8910 = 2.3026.(Log8.91 + Log10^3)$$
$$= 2.3026(0.9499 + 3) = 2.1872 + 6.9087$$
$$\Rightarrow In8910$$

له اعشاري لوګارتم څخه ګټه اخیستل

د اعشاري لوګارتم نه په ګټه اخیستو کولای شو هغه محاسبې سرته ورسوو، چې هغه خورا سختې او آن نا ممکنې وي. د لوګاریتم عملیه کولای شي چې ضرب جمعې ته، تقسیم تفریق ته، توان ضرب ته او جذر تقسیم ته راجع کړي. دغه راز باید وویل شي چې د محاسبې په جریان کې دې د جدول او انترپولیشن طریقې ته مراجعه کیږي. که موږ غواړو چې $(1.08)^{65}$ عدد محاسبه کړو، نو خورا سخت عمل دی او که $\sqrt[52]{945658}$ په لاس راوړو، عملیه غیر ممکنه ده، خو دا دواړه محاسبې د لوګاریتم په مرسته اجرا کولای شو:

د مشتقاتو محاسبه، لیمتونه، توان لرونکي توابع د طبیعي لوګارتم په مرسته په اسانۍ سرته رسوو.

ل

ومړی مثال- $p = 100(1.08)^{10}$ عدد محاسبه کړئ.

$$LogP = Log[100(1.08)^{10}] = Log100 + Log(1.08)^{10} =$$
$$= 2 + 10Log(1.08) = 2 + 10(0.0334) = 2.334$$
$$\Rightarrow LogP = 2.334 \Rightarrow p = antiLog(2.334) = 215.8$$
$$\Rightarrow 100(1.08)^{10} = 215.8$$

دویم مثال- $p=(7.284)^5$ محاسبه کړئ.

$$Logp = Log(7.284)^5 = 5.Log(7.284) = 5(0.8623)$$
$$= 4.115 \Rightarrow p = antiLog(4.3115) = 20490$$
$$\Rightarrow (7.284)^5 = 20490$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

۱- لاندې لوګارتمي معادلې حل کړئ؟

$1)10^3 = 1000$ $\quad$ $2)4^3 = 64$ $\quad$ $3)27^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{3}$

۲- لاندې لوګارتمي رابطې د توان لرونکې تابع په معادلو افادو ولیکئ؟

$1)Log_9^{81} = 1$ $\quad$ $4)Log_4^{256} = 4$

$2)Log_9^{\left(\frac{1}{16}\right)} = -2$ $\quad$ $5)Log_{11}^{1} = 0$

$3)Log0.001 = -3$ $\quad$ $6)Log_2^{25} = 25$

۳- د لاندې لوګارتمونو مشخصه ولیکئ؟

$1)Log738$ $\quad$ $5)Log(13.10^4)$

$2)Log73.8$ $\quad$ $6)Log(5.10^{-2})$

$3)Log0.738$ $\quad$ $7)Log(4.10^{-4})$

$4)Log(9.10^0)$ $\quad$ $8)Log16000$

٤- لاندې لوګارتمونه د جدول له مخې پیدا کړئ؟

$1)Log738$ $\quad$ $6)Log23.4$

$2)Log73.8$ $\quad$ $7)Log300$

$3)Log20.738$ $\quad$ $8)Log999$

$4)Log(14.10^7)$ $\quad$ $9)Log5890000$

$5)Log(0.000316)$ $\quad$ $10)Log0.0456$

۵- لاندې لوګارتمي معادلې حل کړئ؟

$1)Log_a(9x+4) - Log_a(x+2) = Log_a x$

$2)Log_x^{2Logx} = Log(10x)$

$3)Logx + Log(x-3) = 1$

$4)Log_b(x-9) + Log_b^x = 2$

$5)Log_3(x+1) - Log_3(x-1) = 3$

$6)Log_4(3x-3) = Log_2^3$

شپږم څپرکی

د عددونو « عددي» سلسلې

ټولیزه موخه:
د حسابي ، هندسي او هارمونیک تصاعد په سمه او اساسي توګه درک کول او د محاسبې په کارونو کې د اړتیا وړ مهارتونو زده کول او د مسایلو حل د حسابي، هندسي او هارمونیک تصاعدونو د اصولو او قواعدو مطابق.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین په دې وتوانیږي چې:
١- حسابي تصاعد، د تصاعدونو تزاید او تناقص تعریف او مربوط سوالونه حل کړي.
٢- د حسابي تصاعد وسطي عنصر، د حسابي تصاعد مجموعه تعریف او اړوندې پوښتنې حل کړي.
٣- هندسي تصاعد، د هندسي تصاعد وسطي عنصر تعریف او د هغې په فورمول پوه او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
٤- لوستونکي هارمونیک تصاعد تعریف او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
٥- لوستونکي تصاعد او د هارمونیک وسطي عنصر، تعریف او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
٦- د سګما قاعده او اندکس په سمه توګه درک او د هغې اړوندې پوښتنې حل کړي.

عددي سلسلې

د عددونو ترادفونه «تصاعدونه»: عددي ترادفونه عددي یا عددي تصاعدونه د ریاضي له عمده موضوعګانو څخه دي چې د ریاضي د مهمو مسایلو په تحلیل کې د هغې له جملې څخه د عددونو په محاسبه کې د کارونې ډېر ځایونه لري. په دې څپرکي کې د حسابي

او هندسي تصاعدونو مخکيني او ساده مفاهيم تر ارزونې لاندې نيول کېږي.

د تصاعد مفهوم (ترادف): ټاکلي عددونه $a_1,a_2,a_3,a_4......a_n$ د تصاعد يا د عددونو د ترادف په نوم يادېږي چې د پورته ذکر شوو اعدادو څخه هر يو د ذکر شوي تصاعد عنصر کېږي. څرنګه چې a_1 اول عنصر a_2 دوهم عنصر او a_n د n ام عنصر د دې تصاعد وي، د يو تصاعد يا ترادف عناصر کولای شي له يو بل سره منطقي يا الجبري اړيکې ولري.

مثلاً:

١- د جفتو عددونو تصاعد $2,4,6,8,10........2n$

٢- د طاق عددونو تصاعد $1,3,5,7.........2n$

٣- د مضرب عددونو تصاعد $5,10,15,20\ ....5n$

۴- د مضرب عددونو معکوس تصاعد $\frac{1}{3n}$ dn= « n=1,2,3...... »

د تصاعدونو يا ترادفونو تزايد او تناقص

هغو تصاعدونو ته چې د عناصرو عددي قيمت يې په تدريجي توګه زيات شوی وي متزايد ويل کېږي لکه جفت تصاعدونه، طاق، د 5 مضرب عددونه او نور تصاعدونه، چې د عناصرو اندازه يې په تدريجي توګه کمه شي متناقص تصاعد بلل کېږي، لکه د 3 مضرب عددونو معکوس تصاعد

اول مثال- bn=5 $an = n^2$, $\frac{2}{n}$ تصاعدونه، متزايد او متناقص دي؛ خو ولې؟

حل: په پيل کې د تصاعدونو يا ترادفونو څو مسلسل قيمتونه ليکو.

n : 1 2 3 4 6

an : 1 4 9 16 25 36

$\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},\frac{2}{6}$ bn : 2 1

په پورته مثال کې ليدل کېږي، چې د an تصاعد عناصر زياتېږي، څکه نو تزايد او bn تصاعد مخ په کمېدو دی بناپر دې متناقص دی.

حسابي تصاعد يا حسابي ترادف: هغه تصاعد چې د مرتبو مجاورو عناصرو د هرې جوړې

تر منځ توپیر یې د d ثابت عدد وي، د حسابي تصاعد په نامه یادېږي، لکه :

n = 1,2,3,4………..

$a_n +1=a_n +d$

$$d = a_n \pm a_n$$

$a_n +1= +d$

$\Rightarrow d = +1^{-an}$

په دې ځای کې d د مشترک تفاضل په نوم یادېږي.a1 د یاد تصاعد له اول عنصر څخه دی.

دویم مثال ……………………… 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17

$a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6$……………………..

او باید وویل شي چې د پورته مثال مشترک تفاضل په پورته تصاعد کې d=3 وي.

داسې چې

a1= 2

A2=a1+d= 2+3=5

A3=a2+d=5+3+8

A4=a3+d=8+3=11

A5=a4+d=11+3=14

A6=a5+d=14+3=17

که اول عناصر او مشترک تفاضل په یوحسابي تصاعد کې مشخص وي، ټاکل شوی تصاعد ترلاسه کولای شو.

د حسابي تصاعد« حسابي ترادف » اختیاري عنصر ټاکل: کله چې a1 اول عنصر د تصاعد او d مشترک تفاضل او an عنصر د n ام عنصر د حسابي تصاعد وي، د هغوی په منځ کې رابطه په لاندې ډول بررسي کېږي.

$a_2 = a_1+d$

$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$

$a_4=a_2+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$

$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d$

$a_6=a_5+d=(a_1+5d)+d=a_1+5d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

بالاخره په پای کې

لومړی مثال- که د حسابي تصاعد لومړی عنصر $a_1=5$ او مشترک تفاضل يې $d=2$ وي شلم عنصر يې څو دی؟

څرنګه چې $a_1 = 5$ د ی فورمول ته په کتو لرو چې

$d = 2$

$a_n = a_1+(n-1)d$

$a_2=5+38=43 \qquad \Rightarrow a_{20}=5+(20-1)2$

دويم مثال- حسابي تصاعد پيداکړئ، چې په هغې کې $a_6=27$ او $a_2=57$ وي

حل: څرنګه چې په دې سوال کې a_1 او d مشخص نه دی لومړی بايد هغه پيداکړو.

$a6 = a1 + 5d$

$a12 = a1 + 11d$

$a1 + 5d = 27$

$a1 = \pm 11d = \pm 57$

$-6d = -30 \qquad d = +{}^{30}\!/_{6} = 5$

$a_1 + 5d = 27$

$a_1 + 5 \times 5 = 27$

$a_1 = 27 - 25 = 2$

په نتيجه کې $d = 5, a_1 = 2$ دي.

$a_2 = a_1 + d = 2 + 5 = 7 \Rightarrow a_3 = a_2 + d = 7 + 5 = 12$

$a_4 = a_3 + d = 12 + 5 = 17 \Rightarrow a_5 = a_4 + a = 17 + 5 = 22$

$a_6 = a5_4 + d = 22 + 5 = 27$

د حسابي تصاعد وسطي عنصر:

هر کله چې مسلسل عنصر a_{n+1}, a_n, a_{n-1} په داسې حال کې چې $n=2,3,4...$ دی له حسابي تصاعد ټاکلی شي لرو چې.

$$a_n+1+a_n-1=\left[a_1+(n-1\ \ )d\right]+\left[a_1+nd\right]=2\left[a_1+(n-1)d\right]$$

په پورته معادله د $d(n-1)$ په عوض وضع کوو، لرو چې $a_n+1_n(n-1)d$

$$a_n+1+a_n-1=2a_n \Rightarrow a_n=\frac{a_n+1^{+an-1}}{2}$$

د حسابي تصاعد مجموعي عناصر

په حسابي تصاعد کې د n مجموعه لومړی عنصر عبارت دی له

$$a_1+a_2+a_3+a_4+..........+a_n={}^{n}\!/_{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

ثبوت: که n مجموعه لومړی عنصر د هغه په Sn فرض شي، چې.

$$Sn=a_1+a_2+a_3+a_4+............+a_n$$

که n=5 فرض کړو لرو چې

$$S_5=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)......................................I$$
$$S_5=(a_1+4d)+(a_1+3d)+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1....................................II$$

I او II رابطه خوا په خوا جمع کوو، لرو چې:

$$25_5=(2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(2a_1+4d)+(2a_1+4d)$$
$$\Rightarrow 25_5=5(2a_1+4d)\Rightarrow Sn=\frac{5}{2}(2a_1+4d)$$
$$Sn=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

همدارنګه لیکلای شو چې

نتیجه: هر کله چې a_1 لومړی عنصر او a_n د حسابي تصاعد n ام عنصر

$$a_1+a_2+a_3+a_4+..+a_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

ثبوت: دا چې $(2a_1+(n-1)d)$ $a_1+a_2+a_3+a_4........+=\frac{n}{2}$ دی

اوس کولای شو ولیکو چې

$$Sn=\frac{n}{2}\left[a_1+a_1+(n-1)d\right]$$

دا چې $a_n=a_1+(n-1)d$ دی نو لیکلای شو چې $Sn=[a_1+a_n]$

په نتیجه کې لیکو چې $a_1+a_2+a_4+........+a_n=\frac{n}{2}\times[a_1+a_n]$

لومړی مثال- د مسلسلو طبیعي عددونو مجموعه له ۱ تر ۲۰۰ پورې محاسبه کړئ.

حل: طبیعي عددونه حسابي تصاعد جوړوي، داسې چې په هغه کې $a_1=1=d$ دی

ځکه نو قیمتونه په معادله کې ږدو، ځینې $a_n=200, n=200$ دي.

$$a_1+a_2+a_3+............+a_n=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

$$1\ +\ 2+3\ +............+200=\frac{200}{2}[1+200]=100(201)=20100$$

دویم مثال- له 1 تر 100 پورې د طبیعي مسلسلو عددونو مجموعه محاسبه کړئ.

حل: داسې چې $a_1=1=d$ شي.

$$a_1+a_2+a_3............+a_n=\frac{n}{2}[a_1+a_n]$$

کولای شو $a_n=100,\ n=100$ وضع کړو لرو چې

$$1+2+3+.......................+100=\frac{100}{2}(1+100)=50(101)=5050$$

د طبیعي عددونو مجموعه: د حسابي تصاعد طبیعي عددونه چې په هغې کې $a_1=1$ او $d=1$ وي، ځکه نو n مجموعه اول طبیعي مسلسل عدد عبارت دی له:

$$1+2+3+4+..............+n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=\frac{n}{2}[2\times1+(n-1)\times1]=\frac{n(n+1)}{2}$$

نو n مجموع د مسلسل طبیعي عدد چې له ۱ څخه شروع کیږي، عبارت دی له

$$\boxed{1+2+3+4+...........+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

په حسابي تصاعد کې د جفتو مسلسلو عددونو مجموعه:

د جفتو عددونو په تصاعد کې $a_1=2=d$ دی، پرهمدې بنسټ لرو چې

$$2+4+6+..............+2n=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=\frac{n}{2}\left[2*2+(n-1)2\right]=$$

$$=\frac{n}{2}\left[4+(2n-2)\right]=\frac{n}{2}(2+2n)=n(n+1)$$

$$\boxed{\Rightarrow 2+4+6+..........+2n=n(n+1)}$$

مثال- تاق مسلسل عددونه هم حسابي تصاعد دی، چې په هغې کې $d=2, a_1=1$ وي، لکه

$$1+3+5+................+(2n-1)=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]$$

$$=\frac{n}{2}\left[2\times1+(n-1)2\right]=\frac{n}{2}(2+2n-2)=n^2$$

$$\Rightarrow 1+3+5+...................+(2n-1)=n^2$$

هندسي تصاعد «هندسي ترادف»: هغه تصاعد چې د هر عنصر نسبت یې د هغه نه مخکې عنصر د r یو ثابت عدد وي، د هندسي تصاعد په نوم یادیږي، لکه « $n=1,2,3,4$.............. »

$$\frac{a_n+1}{a_n}=r\Rightarrow a_n+1=a_n\times r$$

په دې ځای کې r مشترک نسبت او a_1 دتصاعد اول عنصر نومیږي.

هندسي تصاعد هغه وخت مشخص وي چې اول عنصر او مشترک نسبت یې ټاکلی یا معین وي

مثال: په یوه هندسي تصاعد کې $r=3, a_1=2$ دی $r=3, a_1=2$ عناصر یې وټاکئ.

حل:

$$a_2=a_1\times r=2\times3=6$$

$$a_3=a_2\times r=6\times3=18$$

$$a_4=a_3\times r=18\times3=54$$

د هندسي تصاعد عمومي عنصر: هر کله چې a_1 اول عنصر او r د هندسي تصاعد مشترک نسبت وي، n ام عنصر یې عبارت له $a_n=a_1r^{n-1}$ څخه دی.

ثبوت: د تصاعد عناصر یو د بل په مرسته متوالي په لاس راوړو.

په نتیجه کې په لاس راځي چې:

$$a_2 = a_1 \times r$$
$$a_3 = a_2 \times r = \left(a_1 \times r\right) \ \ r = a \times r^2$$
$$a_4 = a_3 \times r = \left(a \times r^2\right) \ \ r = a_1 r^3$$
$$a_5 = a_4 \times r = \left(a_1 \times r^3\right) \times r = a \times r^4$$
$$\Rightarrow a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

د هندسي تصاعد وسطي عنصر(هندسي ترادف): هر کله چې درې مسلسل عناصر a_{n-1} a_n او a_{n+1} په داسې حال کې، چې n=2,3,4....... دی له هندسي تصاعد څخه انتخاب شي لرو، چې $(a_n-1)(a_n+1) = (a_1 \cdot r^{n-2})(a_1 \cdot r^n) = (a_1 \cdot r^{n-1})^2$

دا چې $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ دی.

$$(a_n-1)(a_n+1) = a_n^2$$

دواړه خواوې تر جذر لاندې نیسو، چې $\sqrt{a_n^{\ 2}} = \sqrt{(a_n-1)(a_n+1)}$ په نتیجه کې په لاس راځي چې

$$an = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}$$

یا په بل عبارت:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

د هندسي تصاعد د عناصرو مجموعه: د n مجموعه د هندسي تصاعد مسلسل عنصر عبارت دی له

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

ثبوت:- لرو چې $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$ او یا په بل عبارت

$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ...a_1 r^{n-1}$ د I رابطې دواړه خواوې په r کې ضربوو رابطه لاندې شکل نیسي.

$$rs_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 .... + a_1r^n ....2$$

اوس۱ رابطه له ۲ رابطې څخه خوا په خوا منفي کوو.

$$rs_n - s_n = a_1r^n - a_1 \Rightarrow s_n(r-1) = a(r^n - 1$$

$$s_n = a_1\frac{r^n - 1}{r-1} = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

مثال- هر کله چې په یوه هندسي تصاعدکې $a_1 = 2$ او $r = 3$ وي، د 5 مجموع عنصر محاسبه کړئ.

حل: لرو چې:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$s_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 \Rightarrow s_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$2 + 6 + 18 + 45 + 162 = 2 \cdot \frac{1-3^5}{1-3} = 2 \cdot \frac{1-3^5}{-2} = \frac{1-3^5}{-1}$$

$$= 3^5 - 1 = 242$$

هندسي سلسله

هر کله چې په یوه هندسي تصاعد کې مشترک نسبت r له (-1,1) انتروال څخه وي، یعنې 1<r<1 - په دې صورت کې د n عدد د لویو قیمتونو لپاره r^n فوق العاده کوچنی کېږي او همدارنګه باید وویل شي، هغه وخت چې n د لایتناهي خواته نږدې کېږي r^n صفر ته تقرب کوي، ځکه نو لاندې رابطه په نظر کې نیسو.

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n = a_1\frac{1-r^n}{1-r}$$

که $r^n=0$ فرض کړو، معادله لاندې شکل غوره کوي

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...+ = \frac{a_1}{1-r}$$

کېنې خوا ته وروستۍ رابطه د هندسي سلسلې په نامه او ښۍ خواته د هغې د قیمت مجموعه نومېږي. هندسي سلسله په لاندې شکل هم لیکلای شو.

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + ... = \frac{a_1}{1-r}$$

که a=1 فرض کړو لیکلای شو چې

$$1 + r + r^2 + r^3 + ... = \frac{1}{1-r}$$

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+............$ سلسله محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a_1=1$ او $r=\frac{1}{2}$ وي.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...........\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

دويم مثال: که د هندسي تصاعد لومړی عنصر $a_1=27$ او مشترک عنصر يې $r=\frac{1}{3}$ وي، د عناصرو د سلسلې مجموعه محاسبه کړئ.

فورمول ته په کتو لرو چې:

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ... = \frac{a_1}{1-r}$$

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + ...\frac{a_1}{1-r}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{29}+.............\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$=27\cdot\frac{3}{2}=40.5$$

درېيم مثال: که د هندسي تصاعد لومړی عنصر 4 او مشترک نسبت 3 يې وي 6 ام عنصر پيداکړئ:

حل:

$$a_0 = ? \quad r = 3 \quad a_1 = 4$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} => a_6 = 4 \cdot r^6 - 1 = r^5 = 4 \cdot 3^5 = 972$$

ځلورم مثال: په یوه هندسي سلسله کې $a_1=3$ او $r=2$وي a_6 پیداکړئ.

حل:

$$r=2$$
$$a_1=3$$
$$n=6$$

$$s_n=a_1\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$

$$s_6=3\cdot\frac{2^6-1}{2-1}=3\cdot\frac{64-1}{1}=3\cdot 63=189$$

پنځم مثال: که $a_1=5$ او $r=3$ ، $s_n=200$ وي n او a_n پیدا کړئ.

حل: فورمول ته په کتو لرو، چې:

$$s_n=a_1\cdot\frac{r^n-1}{r-1}$$
$$s_n=a_1\cdot 200 \quad r=3 \quad a_1=5$$

په فورمول کې وضع کوو، N پیداکوو.

$$200=\frac{5(3^n-1)}{3-1}=\frac{5\cdot 3^n-5}{2} \Rightarrow 400=5\cdot 3^n-5$$
$$\Rightarrow 405=5\cdot 3^n \Rightarrow \frac{405}{5}=4^n \Rightarrow 81=3^n$$
$$3^n=3^4 \Rightarrow n=4 \Rightarrow 3^4=3^4$$

دا مو پیدا کړ، چې$n=4$ دی

$$a_4=a_1r^3=5\cdot 3^3=5\cdot 27=135$$

هارمونیک تصاعد

د an تصاعد ته هغه وخت هارمونیک ویل کېږي چې د هغې تصاعد معکوس $b_n=\frac{1}{a_n}$ یو حسابي تصاعد وي.

مثال: د طبیعي عددونو معکوس تصاعدونه، تاق اعداد، د 5 مضرب اعداد او نور هارمونیک تصاعد دي یعنې:

$$a_n=\frac{1}{n}: \quad 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}.................$$
$$b_n=\frac{1}{2n-1}: \quad 1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7}..............$$
$$c_n=\frac{1}{5n}: \quad \frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{15}$$

د هارمونیک تصاعد وسطي عنصر

هر کله چې درې مسلسل عناصر a_n-1 a_n, او a_n+1 په داسې حال کې، چې (n=2,3,4……..) دي له هارمونیک تصاعد څخه انتخاب شي.

دې ته په کتو، چې $\frac{1}{a_n-1}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_n+1}$ د یوه حسابي تصاعد عناصر دي، لرو چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_n-1}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{a_n-1^2+a_n+1}{(a_n+1)(a_n-1)}}{2} = \frac{a1-1+a_n+1}{2(a_n+1)(a_n-1)}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{a_n-12+a_n+1}{2(a_n+1)(a_n-1)} 2(a_n+1)(a_n-1) = a_n(a_n-1+a_n+1)$$

$$=> a_n = \frac{2(a_n-1)(a_n+1)}{a_n-1+a_n+1}$$

پورتنی فورمول په لاندې شکل لیکلای شو:

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n+1}$$

مثال: لاندې هارمونیک تصاعد په نظر کې نیسو او حسابوو یې

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11} \dots\dots\dots$$

د ځمونې په توګه $a_4 = \frac{1}{7}$ عنصر انتخابوو.

$$a_4 = \frac{2a_3 \cdot a_5}{a_3 + a_5}$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{45}}{\frac{14}{45}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{7} = a_4$$

د عددونو اوسطونه

حسابي اوسطونه، هندسي او هار مونیک د b,c دوه حقیقي عددونه عبارت دي له:

حسابي اوسط $A = \frac{a+b}{2}$

هندسي اوسط $G = \sqrt{a \cdot b}$

هارمونیک اوسط $H = \frac{2a \cdot b}{a+b}$

دويم مثال: د 2 او 8 عددونو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه عبارت دي له:

$$A=\frac{a+b}{2}=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$G=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4 \Rightarrow G=\sqrt{a\cdot b}$$

$$H=\frac{2a\cdot b}{a+b}=\frac{2\cdot 2\cdot 8}{2+8}=\frac{32}{10}=3.2$$

پهمدارنګه د 2، 5، 8 عددونه حسابي تصاعد دی. د2، 4، 8 عددونه هندسي تصاعد کې واقع دی.
2 2 3 8 عددونه هارمونیک تصاعد جوړوي

دا چې حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه په دوه حقیقي عددونو تعریف کوو، کولای شو په n حقیقی عدد a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_n او a_n هم تعریف کولای شو.

$$A=\frac{a_1+a_2+a_3+.......a_n}{n}$$

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3.......a_n}$$

$$H=\frac{n\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3.....a_n}{a_1+a_2+a_3+........+a_n}$$

د سګما قاعده: ټول مسایل چې موږ د عناصرو مجموع په حسابي او هندسي تصاعد کې تشریح کړل چې $s_n=a_1+a_2+a_3+..........+a_n$ وي.

کولای شو د جمع حاصل په لنډه او شنلې توګه ولیکو او هغه په Σ (سګما)وښایو چې یوناني توری دی او د مجموعې معنی ورکوي او لاندې مجموعه په لاندې شکل لیکو

$$\sum_{n=1}^{n} a_n=s_n=a_1+a_2+a_3+.........+a_n$$

په پورته رابطه کې Σ یوه مجموعه راښیي او د Σ څخه پورته او ښکته علامې ښودنه کوي. او n ټول تام عددونه له 1 څخه تر n پورې په بر کې نیسي. n د انډکس(انټروال) په نوم یادیږي او د یوه مجموعي انډکس لپاره هر توری کارولای شو؛ خو د i ,j ,k او n کارول ډېر معمول دي.

$$\sum_{h=1}^{n} 2hi=1=\sum_{i=1}^{n} 2i=\sum_{j=1}^{n} 2j=2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+..............2n$$

$$=2+4+6........+2n$$

$$\sum_{h=1}^{n} 5h=\sum_{j=1}^{n} 5j=\sum_{i=1}^{n} 5i=5^1+5^2+5^3+..........5^n$$

یا

$$=5+25+125+......5^n$$

مثال: د لاندې جمع حاصل د Σ په شکل ولیکئ.

حل:

$$1+3+5+7+........+(2n-1)$$

$$1+3+7+...............+(2n-1)=\sum_{h=1}^{n}(2h-1)$$

مثال: د لاندې جمع حاصل د Σ په شکل ولیکئ.

حل:

$$1+4+9+.......n^2$$

$$1+4+9+.......n^2=\sum_{h=1}^{nq}(2h-1)$$

دریم مثال: د $\sum_{i=1}^{n}(4h^2-3h)$ د جمع حاصل محاسبه کړئ.

حل:

$$\sum_{h=1}^{n}(4h-3h)=(4\cdot 22-3\cdot 1)+(4\cdot 22-3\cdot 2)+(4\cdot 32-33)$$

$$=1+10+27=38$$

څلورم مثال: $\sum_{j=2}^{5}\frac{j-1}{j+1}$ د جمعې حاصل يې پيدا کړئ.

حل:

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{j-1}{j+1}=\frac{2-1}{2+1}+\frac{3-1}{3+1}+\frac{4-1}{4+1}+\frac{5-1}{5+1}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{10+15+18+20}{30}=\frac{63}{30}=\frac{21}{10}$$

د شپږم څپرکي پوښتنې:

۱- له 1 څخه تر 500 پورې د طبیعي عددونو د جمعې حاصل پیدا کړئ؟

۲- د ټولو هغو تامو عددونو مجموعه پیدا کړئ، چې د 10 او 500 تر منځ واقع دي او $a_1=4$ وي.؟

۳- په یوه حسابي تصاعد کې $a_1=12$ او $d=10$ وي؛ فرض کوو، چې $a_n=500$ دی n پیداکړئ؟

٤- په یوه حسابي تصاعد کې $a_1=3$ او $d=5$ دی او $a_n=510$ دی n پیدا کړئ؟

٥- د یوه حسابي تصاعد n ام عنصر 180 او $a_1=6$ وي d پیداکړئ؟

٦- که په یوه حسابي تصاعد کې $a_1=7$ او $a_9=77$ وي، تصاعد معین کړئ؟

۷-د $a_n = 2n^n$ تصاعد متزاید ولې دی؟

۸- د $a_n = \frac{2n+1}{n}$ تصاعد تزاید دی که تناقص ؟

۹-د حسابي تصاعد لومړی عنصر a1=5 او d=7 وي، (50) ام عنصر یې پیداکړئ؟

۱۰- که په یوه حسابي تصاعد کې $a_1 = \frac{1}{3}$ او $r = \frac{1}{2}$ وي، s_{10} پیداکړئ؟

۱۱- هر کله چې په یوه هندسي تصاعد کې $a_1=4$ او $r=4$ وي، د6 مجموع عنصر پیداکړئ؟

۱۲- کله چې د یوه هندسي تصاعد لومړی عنصر $a_1=24$ وي او مشترک نسبت $r = \frac{1}{2}$ وي، د عناصرو د سلسلې مجموعه پیداکړئ؟

۱۳- د هندسي تصاعد مجموعه $1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+$ .... محاسبه کړئ؟

١٤- که په یوه هندسي تصاعد کې $a_1=27$ او د عناصرو د سلسلې مجموع40.5 مشترک نسبت یې پیداکړئ؟

١٥- هر کله چې په یوه هندسي تصاعد کې $a_1=4$ او $r=6$ وي a_7,a_6,a_5,a_4,a_3,a_2 او a_6 عناصر محاسبه کړئ؟

١٦- د 4 او 8 اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه ولیکئ؟

۱۷- د 4 او 9 اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه پیدا کړئ؟

۱۸- د $(\frac{1}{3}, 243)$ او $(\frac{1}{3}, \frac{-32}{27})$ اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه محاسبه کړئ؟

۱۹-لاندې هارمونیک تصاعد په نظر کې نیسو $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{9}$.......... د نمونې په توګه $a_5 = \frac{1}{9}$ عنصر وښاکئ او هغه محاسبه کړئ؟

۲۰- د 2 او 8 حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه پیداکړئ؟

۲۱- د 2 او 4حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه محاسبه کړئ؟

سرچینې او اخېستنې:

١- رياضی عمومی مؤلف داکتر غوری سال 1386

٢- رياضيات عمومی سردار محمد 2006 میلادی

٣- لکچر نوت های پوهاند اقتصاد سال های 1377 و 1376

٤- رياضيات عالی موءلف پوهنوال دکتور محمد (نور غوری) و زا کتاب های صنوف 11 و 12 مکاتب نيز استفاده شده است.

د ښوونيز نصاب د پراختيا د رياست پيغام

د پوهنې وزارت د تخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت دښوونيز نصاب د انکشاف رياست د ټولنې دعيني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلينو او شاګردانو د درسي کتابونو په برخه کې يې تخنيکي او مسلکي رشتې درلودې او لري يې، په لومړي سرکې يې تصميم ونيو، چې په ښوونيزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بياکتنه وکړي او ورپسې بيا د شاګردانو او محصلينو د درسي کتابونو د تاليف لپاره مبادرت او کوښښ وکړي. د خدای(ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په ميړانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تاليف شول تر څو په وړيا ډول د شاګردانو او محصلينو په واک او اختيار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، ګرانو شاګردانو او د تخنيکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصينو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صميمانه هيله کيږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تاليف او تدوين شوي دي. د مسلکي، تخنيکي او علمي مطالبو او مفاهيمو د څرنګوالي په هکله خصوصاً د هغوی املايي او انشايي اشتباهاتو په اړهمونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخوکې ګرانو شاګردانو ته له دې څخه ښه، غوره، ګټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له ګرانو شاګردانو او محصلينو څخه هيله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هيواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظرکې ونيسي او د کتابونو په ساتنه کې کوښښ او زيار وباسي، ترڅو د ډېرو شاګردانو او محصلينو د ګټې وړ وګرځي.

پته: دپوهنې وزارت – دتخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت د تعليمي نصاب د انکشاف رياست – دکتابونو د تاليف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مديريت.