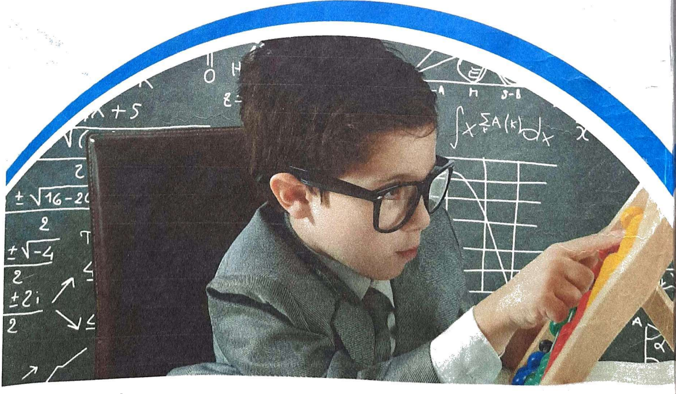
آموزشگاه عالی ارقم
ARQAM

برنامه اساسات و کانکور

الجبر عددی

ترتیب کننده
دوکتور احمد سمیر امیری



فصل اول

الجبر (Algebra)

الجبر از کلمه جبرگرفته شده است که به معنی تلافی کردن , جبران کردن ومرتب نمودن می باشد.این علم یکی ازبخش های عمده علوم ریاضیات بوده و ارتباطاتی را که بین کمیت ها وعلوم مختلف وجود دارد در شکل فورمول درمی آورد.واضح است که انسان ها درزندگی روزمره به مسایل مختلفی اعم از ساده ومغلق برمیخورند.مسایل ساده بااستفاده ازعلم حساب حل ومحاسبه میگردند اما مسایل مغلقی که حساب از حـل آن عاجزاست به آسانی بوسیله الجبر حل میگردند.که اسم الجبر(جبران کردن) به اساس این خصوصیت بالای این علم اطلاق میشود. نام الجبراز کتاب الجبر المقابله اثر مشهور محمد بن موسی که درسال (203ه ش) تدوین گردیده گرفته شده است.برخلاف علم حساب درالجبربرعلاوه اعداد ازحروف مانند $(x, y, z, a, b, ...)$ نیز استفاده میشود که حروف نشان دهنده مقادیر کمیت ها میباشد.باید یاد آورشد که درالجبرازاعداد الجبری که شامل ست اعداد حقیقی (تمام اعداد مثبت و منفی) میباشد استفاده می شود.

الجبر به دو بخش اساسی تقسیم شده است.

1) الجبر عددی　　　　2) الجبر حروفی

که در این چپتر تنها الجبر عددی را به بحث میگیریم.

الجبر عددی Numerical Algebra :

در الجبرعددی تنها ازاعداد حقیقی وعملیات بالای آنها استفاده میشود البته درالجبر عددی ازعلامه ها + و – برعلاوه استفاده معمول برای نشان دادن استقامت نیزاستفاده میشود برای بهتر فهمیدن الجبر لازم است تا معرفی از اعداد داشته باشیم.

ست اعداد حقیقی Real Number

ست اعداد حقیقی شامل اعدادیست که توسط آن شمارش و پیمایش اشیا صورت میگیرد وست آن توسط IR ارائه می گردد.

$$IR=\left\{-\infty \ \dots \ -\frac{11}{2} \ ,-\sqrt{15}\ ,-3\ ,-2\ ,-1\ ,0\ ,1\ ,\frac{3}{2}\ ,2\ ,3\ ,\sqrt{14}\dots +\infty\right\}$$

ست اعداد حقیقی مشتمل بر اعداد نسبتی و غیر نسبتی می باشد.

اعداد نسبتی Rational Number :

تمام آن اعداد حقیقی که در شکل نسبت دوعدد تام $\left({}^{a}/_{b}\right)$ طوریکه $b \neq 0$ باشد نوشته شده بتواند بنام اعداد نسبتی یاد میشود.

مثلاً"

1) $0{,}33\bar{3}=\frac{1}{3}$

2) $0{,}125=\frac{1}{8}$

3) $\sqrt{4}=2=\frac{2}{1}$

4) $\frac{125}{111}=1{,}\overline{126}$

5) $12=\frac{12}{1}$

6) $-95=-\frac{95}{1}$

مثالها : کدام یک از اعداد ذیل نسبتی (ناطق) است.

1) $44{,}9$

2) -9

3) $0{,}123123123....$

4) $2{,}324567807657832...$

حل :

1) $44{,}9=\frac{449}{10}$ چون یک کسر اعشار ختم شونده است بنا" یک عدد نسبتی است و میتوان انرا به شکل نسبت نوشت.

2) -9 یک عدد نسبتی است چون میتوان انرا به شکل $-\frac{9}{1}$ نوشت که بدین اساس تمام اعداد تام ناطق اند .

3) $0{,}123123123....$ چون عدد اعشاری متناوب است پس یک عدد نسبتی است.

4) $2{,}324567807657832...$ نه اعشاری ختم شونده و نه اعشاری متوالی است بنا" به شکل نسبت نوشته نشده و نسبتی(ناطق) نیست.

2) اعداد غیر نسبتی Irrational Number :

اعداد حقیقی که در شکل نسبت دو عدد تام (a/b) طوریکه $b \neq 0$ باشد نوشته شده نتواند بنام اعداد غیر نسبتی یاد میشود.

مثلاً

1) $\sqrt{2} = 1,41421356237309504880 1...$	4) $e = 2,718281828...$
2) $\pi = 3,14159265358979323846 26...$	5) $0,101001000100001...$
3) $\sqrt{3} = 1,73205080756887729352 7...$	6) $\log_{10} 3 = 0,477121...$

ست اعداد نسبتی مشتمل بر اعداد تام و کسری می باشد.

a. اعداد تام Integers Number's :-

اعداد نسبتی غیر کسری را بنام اعداد تام یاد می نمائید.

$$I = \{-\infty \ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots +\infty\}$$

ست اعداد تام مشتمل بر اعداد کامل ومنفی می باشد.

ست اعداد تام منفی : - عبارت از $A = \{-\infty \ \dots -3, -2, -1\}$

ست اعداد کامل:- عبارت از $B = \{0, 1, 2, 3 \dots +\infty\}$

ست اعداد کامل مشتمل بر صفر و اعداد طبعی می باشد.

ست اعداد طبیعی Natural Number :

قدیمی ترین اعدادیست که توسط آن شمارش و پیمایش اشیاء صورت میگیرد و توسط (IN) نشان داده میشود.

$$IN = \{1\ ,\ 2\ ,3\ \ldots\ +\infty\}$$

b. اعداد کسری Fractional Number :

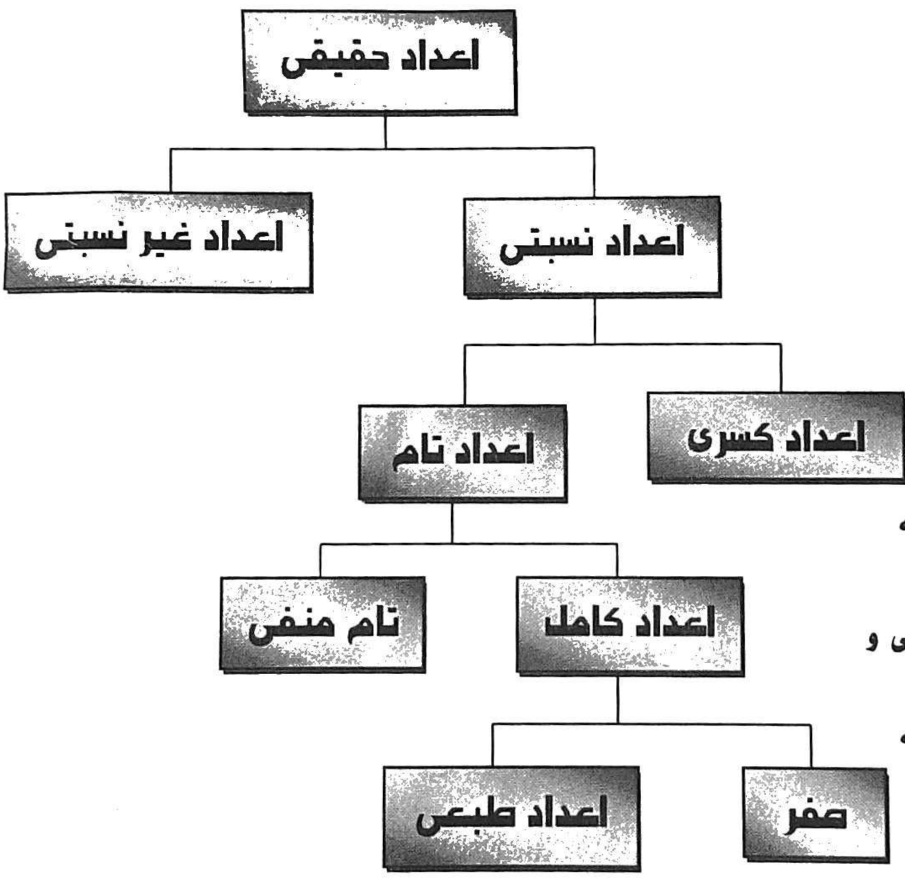
ست اعداد نسبتی که تام (مکمل) نباشد بنام اعداد کسری یاد میشود و به دو نوع میباشد.

1 - کسر عام　　　　**2- کسر اعشار**

در صورتیکه ست اعداد حقیقی به IR. و اعداد نسبتی را Q و اعداد غیر نسبتی را به Q' و ست اعداد تام را به I نشان دهیم رابطه ذیل را بین شان موجود است .

a. $Q \subset IR$　　b. $Q' \subset IR$　　c. $IR = Q \cup Q'$

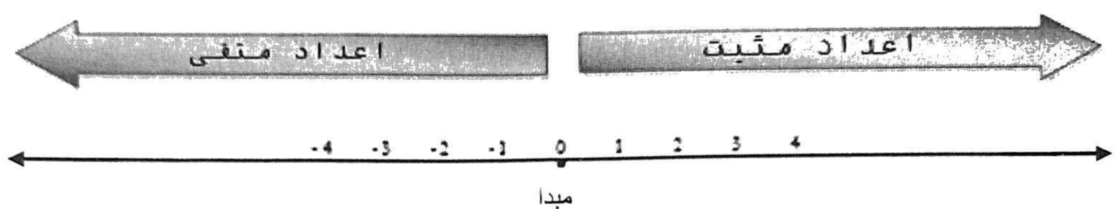
d. $R \cap Q = Q$　　e. $Q \cup Q' = IR$　　f. $I \subset Q$



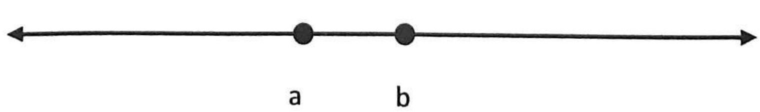
یاداشت : به خاطر داشته باشید که حاصل جمع و تفریق اعداد نسبتی با غیرنسبتی مساویست به اعدادغیر نسبتی و همچنان حاصل ضرب و تقسیم اعدادغیرنسبتی با تمام اعداد نسبتی به استثنای 0 آن مساویست به اعداد غیرنسبتی .

محور اعداد Number Line

محور اعداد خط مستقیم است که درآن ست اعداد حقیقی نمایش داده میشود و دارای یک مبده (صفر) میباشد که اعداد موجود در طرف چپ محورنظربه صفر اعداد منفی و اعداد موجود در طرف راست محورنظربه صفر اعداد مثبت میباشند.



هر نقطه در روی محور اعداد مرتبط به یک عدد و هر عدد در روی محور اعداد مرتبط به یک نقطه میباشد پس به این اساس بین هر نقطه و عدد رابطه موجود است که هر نقطه یک عدد و هر عدد یک نقطه را نشان میدهد و این خصوصیت زمینه را برای مقایسه اعداد فراهم میسازد یعنی زمانیکه دو عدد مختلف را در روی محور اعداد انتخاب مینمایم یکی از آن دو عدد حتماً بزرگ و دیگر آن کوچک می باشد یعنی حتماً یکی ازآن دوعدد بطرف راست نظربه عدد دوم واقع است عددیکه به طرف چپ واقع است نظربه عددکه بطرف راست است کوچک وعددیکه بطرف راست واقع است نظربه عدد طرف چپ بزرگ میباشد مثلا"در شکل ذیل دو عدد حقیقی مانند a و b را درنظر بگیریم مشاهده میکنیم که عدد b نظر به a به طرف راست واقع بوده و یک عدد بزرگ میباشد.



درشکل فوق بصورت گفتاری میتوان گفت که b نظر به a بزرگ است و به شکل نوشتاری درشکل میتوان نوشت که

$a < b$ یا $b > a$

سمبول ها :- $<$, $>$, $\geq$ و $\leq$ بنام سمبول های غیر تساوی یاد میشوند.

1- تمام اعداد منفی کوچک از صفر اند و طور ذیل نشان داده می شود.

مثلاً :- $0 > -2$ $0 > -4$ $-6 < 0$

2- تمام اعداد مثبت بزرگ از صفر است و طور ذیل نشان داده می شود.

مثلاً :- $0 < +5$ $+3 > 0$ $0 < +9$

پس به این اساس تمام اعداد حقیقی از سه حالت ذیل خارج نیستند.

(1) کوچک از صفر $x < 0$

(2) بزرگ از صفر $x > 0$

(3) مساوی به صفر $x = 0$

مثالها : اعداد ذیل را با هم مقایسه نماید.

1) 7 و 8
2) 16 و 12
3) -9 و -3
4) -11 و 0

حل :

1) $7 < 8$
2) $16 > 12$
3) $-9 < -3$
4) $-11 < 0$

تمرین : اعداد ذیل را با هم مقایسه نماید.

1) $15 \; (\quad) \; 19$
2) $-89 \; (\quad) \; -99$
3) $\pi \; (\quad) \; 3{,}14$
4) $+1{,}5 \; (\quad) \; -1{,}9$

قیمت مطلقه اعداد الجبری

Absolute Value of Algebraic Numbers

قیمت مطلقه یک عدد مثبت ویا منفی عبارت از قیمت مثبت آن می باشد ویا هم قیمت مطلقه یک عدد الجبری عبارت از خود عدد است بدون در نظر داشت علامه آن.

علامه قیمت مطلقه : $|\;|$

مثلاً : قیمت مطلقه عدد 4- عبارت از 4 است.

$$|-4| = 4$$

$$|+4| = 4$$

❖ پس به این اساس قیمت مطلقه متحول x طوریکه x یک عدد حقیقی باشد مساویست به.

1) $|x| = x$ اگر $x \geq 0$

2) $|x| = -x$ اگر $x < 0$

نوت

قیمت مطلقه یک عدد هیچگاهی منفی نمی باشد.

مثلا" : اگر X = -5 بناء" قیمت مطلقه آن عبارت از

$$|-5| = -(-5) = 5$$

و اگر X=+3 بناء" قیمت مطلقه آن عبارت از

$$|+3| = 3$$

مثالها : قیمت مطلقه اعداد ذیل را دریابید.

1) $\left|-\frac{3}{2}\right|$

2) $|-9|$

3) $|6.3|$

4) $|-2+8|$

5) $\left|-2\frac{1}{2}\right|$

6) $|0|$

7) $|\pi-\sqrt{2}|$

8) $-|-8|$

حل:

1) $\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$

2) $|-9|=9$

3) $|6,3|=6,3$

4) $|-2+8| = |6| = 6$

نوت: علامه قیمت مطلقه در افاده های مانند $|-2+8|$ همچنان مانند قوسها کار میدهد یعنی اولا" عملیات را اجرا کرده بعد قیمت مطلقه آن را دریافت منمایدم .

5) $\left|-2\frac{1}{2}\right| = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$

6) $|0| = 0$

- صفر تنها عدد حقیقی است که قیمت مطلقه آن صفر است .

7) $|\pi-\sqrt{2}| = \pi-\sqrt{2}$

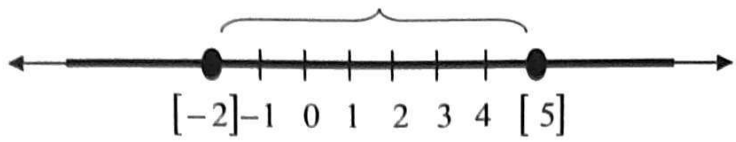
چون عدد π نسبت به عدد $\sqrt{2}$ بزرگ است پس حاصل تفریق هر دو یک عدد + است بنا" قیمت مطلقه آن خود آن است.

8) $-|-8| = -(8) = -8$

قیمت مطلقه 8- مساویست به 8 ولی علامه خارج قیمت مطلقه در ان ضرب میشود.

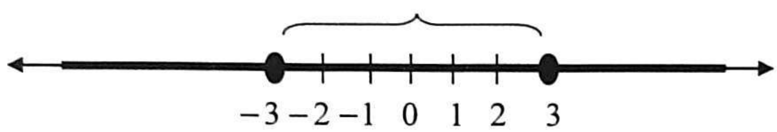
هم چنان قیمت مطلقه برای نشان دادن فاصله بین دو عدد در روی محور اعداد نیز استفاده میشود مثلا" فاصله بین اعداد 5 و 2- را درنظر میگیریم برای دریافت فاصله اعداد را از هم تفریق نموده و قیمت مطلقه ان را میگیریم.

فاصله بین 2- و 5 $\qquad |-2-(5)| = |-7| = 7$



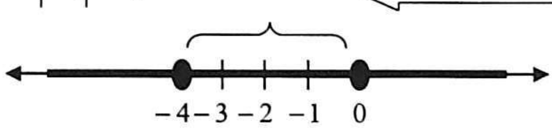
مثال 2 : فاصله بین اعداد 3 و 3- را دریابید.

حل : فاصله بین 3 و 3- $\qquad |3-(-3)| = |3+3| = 6$



مثال 3: فاصله بین اعداد 0 و 4- را دریابید.

حل : فاصله بین 0 و 4- $\qquad |-4-(0)| = |-4| = 4$



نظر به مثال فوق میتوان قیمت مطلقه اعداد را فاصله آنها نظر به صفر در روی محور اعداد نیز تعریف کرد.

فاصله بین دو عدد :

در صورتیکه a , b اعداد حقیقی باشند فاصله بین a , b عبارت از.

فاصله بین a , b $= |a-b| = |b-a|$

خواص قیمت مطلقه:

1) قیمت مطلقه هر عدد از خود عدد کوچک بوده نمیتواند. $|a| \geq a$

مثال : قیمت مطلقه 2 و 2- را در نظر میگیریم. $|2| = 2$ و $|-2| > -2$

2) قیمت مطلقه هر عدد با متضاد آن مساوی است. $|a| = |-a|$

مثال : قیمت مطلقه 5 و 5- با هم مساوی است. $|5| = |-5|$

3) قیمت مطلقه یک حاصل ضرب مساوی است به حاصل ضرب قیمت مطلقه هر یک آنها. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

مثال : $|2 \cdot 3| = |2| \cdot |3| \Longrightarrow 6 = 6$

4) قیمت مطلقه یک حاصل تقسیم مساوی است به حاصل تقسیم قیمت مطلقه هر یک آنها. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

مثال : $\left|\frac{-4}{2}\right| = \frac{|-4|}{|2|} \Longrightarrow |-2| = \frac{4}{2} \Longrightarrow 2 = 2$

5) قیمت مطلقه حاصل جمع دو عدد کوچک و یا مساوی به حاصل جمع قیمت مطلقه هر یک میباشد. $|a+b| \leq |a| + |b|$

مثال : $|3+(-2)| < |3| + |-2| \Longrightarrow |1| < 3+2 \Longrightarrow 1 < 5$

6) قیمت مطلقه حاصل تفریق دو عدد بزرگ و یا مساوی به حاصل تفریق قیمت مطلقه هر یک میباشد. $|a-b| \geq |a| - |b|$

$|4-(-2)| < |4| - |-2| \Longrightarrow 6 < 2$

تمرین : قیمت مطلقه اعداد ذیل را دریابید.

1) $|-5,7|$

2) $|\pi - \sqrt{3}|$

3) $|2 - \sqrt{2}|$

4) $|5+3|$

5) $|5\sqrt{2} - 7|$

6) $|3e - 6|$

عملیات اساسی بالای اعداد الجبری

Operation Of Algebraic Number

عملیه جمع اعداد الجبری Addition Of Algebraic Number:

در عملـــیه جمع اعداد الجـبری اگر اعــداد هم علامه باشــند از علامه های مشـــــابه یـــکی را در نظر گرفته واعداد را با هم جمع می نمـائیم درصورتیـکه اعداد مختلف العلامه باشند از عدد بزرگ (ازنگاه قیمت مطلقه) عدد کوچــک را تفریق نموده و علامه را از عدد بزرگ (از نگاه قیمت مطلق) میگیریم.

مثالها : اعــداد نیـل را با استفاده از محور اعداد بـا هـم جـمـع نماید.

1) $(+3) + (+4)$

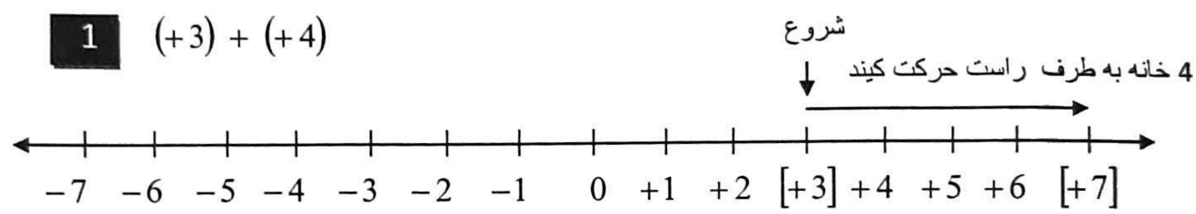
2) $(-5) + (-2)$

3) $\left(-\frac{2}{5}\right) + (+6)$

4) $-6 + 5$

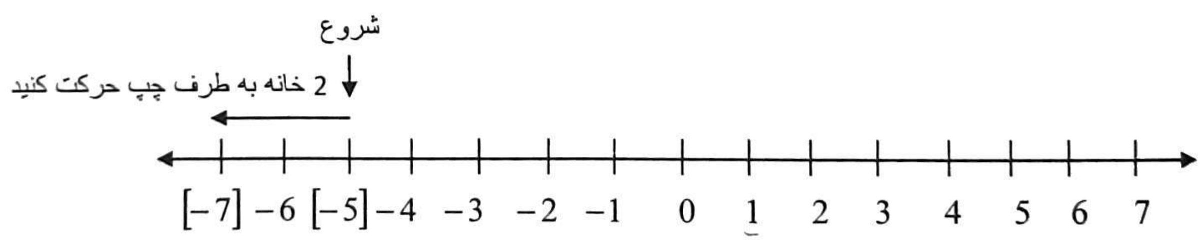
حل :

1 $(+3) + (+4)$



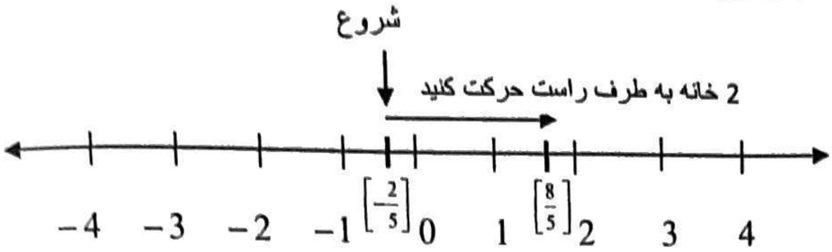
$(+3) + (+4) = +7$

2 $(-5) + (-2)$



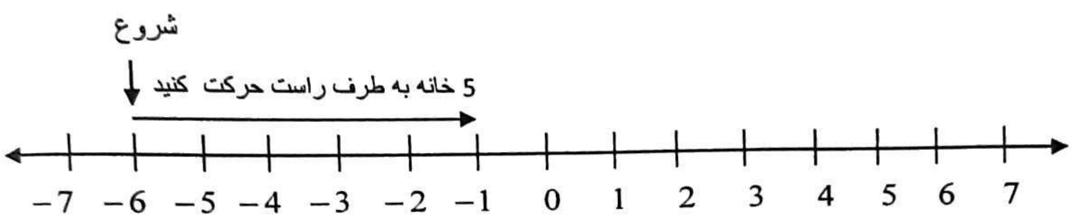
$(-5) + (-2) = -7$

3 $\left(-\frac{2}{5}\right) + (+2)$



$$\left(-\frac{2}{5}\right) + (+2) = \frac{8}{5}$$

4 $-6 + 5$



$-6 + 5 = -1$

مثالها : اعداد ذیل را بدون محور اعداد با هم جمع نماید.

1) $(+6) + (+9)$

2) $(-8) + (-5)$

3) $-21 + (+26)$

4) $(-24) + (+34) + (-8) + 11$

حل :

1) $(+6) + (+9) = +15$

چون اجـــزای جمـــعی + مستند نتیجه جمع یک عدد مثبت میباشد.

2) $(-8) + (-5) = -13$

چون اجـــزای جمـــعی − مستند نتیجه جمع یک عدد منفی میباشد.

3) $-21 + (+26) = 26 - 21 = +5$

قیمت مطلقه $21=|-21|$ و قیمت مطلقه عدد $26=|+26|$ دیده میشود که26 بزرگ است پس از 26 عدد 21 را تفریق نموده که نتیجه تفریق هر دو عدد 5 میباشدچون قیمت مطلقه عدد 26+ بزرگ است بنا" علامه حاصل تفریق آن + میباشد.

4) $(-24) + 34 + (-8) + 11$

$= [(-24) + (-8)] + [11 + 34]$

$= -32 + 45$

$= 13$

اعداد مثبت و منفی را با یکدیگر بصورت گروپی ترتیب کرده با هم جمع کرده و نتیجه هر دو را در اخیر با هم جمع نماید

متضاد جمعی Additive Inverse :- دو عدد حقیقی که حاصل جمع آنها مساوی به صفر گردد بنام متضاد جمعی یکدیگر یاد می شوند.

$$(a) + (-a) = (0)$$

❖ تمام اعداد حقیقی دارای یک متضاد جمعی اند که هم مقدار و مخالف الاشاره آن میباشند.

مثالها : متضاد جمعی اعداد ذیل را دریابید.

1) 35

متضاد جمعی -35

چون $(35) + (-35) = 0$

2) -4.76

متضاد جمعی +4.76

چون $(4.76) + (-4.76) = 0$

تمرین : اعداد ذیل را با هم جمع نماید.

1) $(+25) + (+9) = ?$

2) $(-41) + (+12) + (+33) = ?$

3) $(+16) + (+71) + (+47) = ?$

4) $\left(+\frac{3}{5}\right) + \left(+9\frac{1}{2}\right) = ?$

5) $(-12{,}8) + (-0{,}20) + (+18{,}5) = ?$

6) $(-30) + (-20) + (-10) = ?$

عملیه تفریق اعداد الجبری Subtraction of Algebraic Numbers :

عملیه تفریق اعداد الجبری عینا" مانند عملیه جمع اعداد الجبری اجراء شده با تفاوت اینکه در عملیه تفریق علامه مفروق را تغیر میدهیم و یا هم به عباره بسیار ساده برای تفریق نمودن یک عدد الجبری متـضاد جمعی آنرا جمع نمائید.

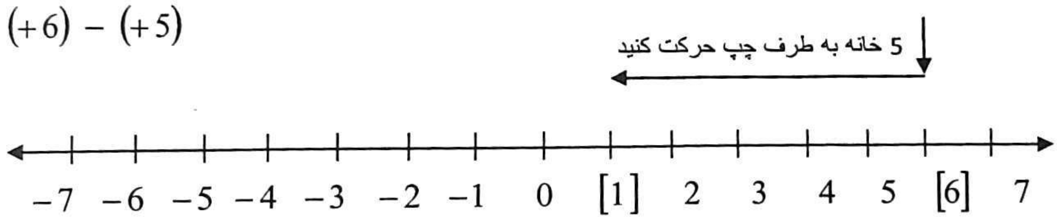
مثالها : اعداد ذیل را با استفاده از محور اعداد تفریق نماید.

1) $(+6)-(+5)$

2) $(+4)-(+8)$

حل :

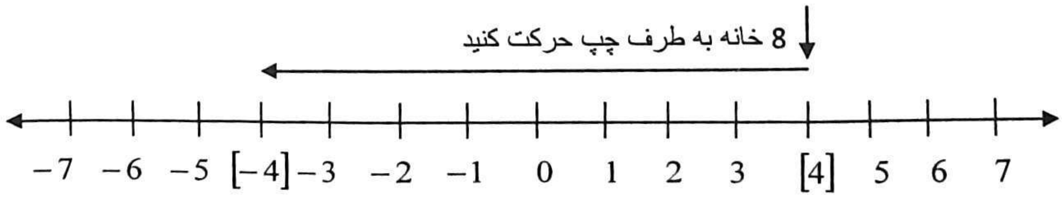
1 $(+6)-(+5)$



$(+6)-(+5)=+1$

2 $(+4)-(+8)$

قرار تعریف میتوانیم متضاد 8+ یعنی 8- را با 4+ جمع مینمایم.



$(+4)-(+8)=(+4)+(-8)=-4$

مثالها : اعداد ذیل را بدون محور اعداد از هم تفریق نماید.

1) $-1-(+4)$

2) $(-6)-(-3)$

3) $(+17)-(-8)$

4) $\left(-1\frac{2}{3}\right)-(-8)$

حل :

علامه 4 + را تغـــیر داده و عملیه جمـــع را انجام میدهم
ویا هم گفـــــته میتوانیم که متضاد آنرا جمع مینمایم.

1) $-1-(+4)$

$= -1 + (-4) = -5$

علامه 3 - را تغـــیر داده و عملیه جـمـع را انجام میدهم
ویا هم گفـــــته میتوانیم که متضاد آنرا جمع مینمایم.

2) $(-6)-(-3)$

$=(-6) + (+3) = -3$

3) $(+17)-(-8)$

متضاد 8- یعنی 8+ را با عدد 17+ جمع مینمایم.

$= (+17) + (+8) = +25$

4) $\left(-1\frac{2}{3}\right)-(-8)$

اولا" کسر را غیر واجب کرده باز از هم تفریق منمایم البته
بخاطر داشته باشید که علامه – در کسر $\left(-1\frac{2}{3}\right)$ مربوط
کل کسر میشود بنا" به حیث علامه کلی کسر انتخاب منمایم.

$= \left(-\frac{5}{3}\right) + (+8) = 6\frac{1}{3}$

تمرین : اعداد ذیل را تفریق نماید.

1) $(+34)-(+28)$

2) $15-(-13)$

3) $(-6,5)-(-12,4)$

4) $(+0,\bar{6})-(-1,\bar{3})$

5) $(-14)-(+12)-(-27)$

6) $\left(-3\frac{1}{2}\right)-(-2,5)$

عملیه ضرب اعداد الجبری Multiplication Of Algebraic Number:

در عملیه ضرب اعداد الجبری اولاً علامه ها را ضرب نموده و بعداً اعداد را همانند اعداد حسابی با هم ضرب می نمائیم.

ترتیب ضرب علامه ها :- حاصل ضرب دو عدد هم علامه همیشه یک عدد مثبت و حاصل ضرب دو عدد مختلف العلامه همیشه یک عدد منفی می گردد.

$$\left.\begin{array}{l}(+)\cdot(+)=+\\(-)\cdot(-)=+\end{array}\right\}\text{ هم علامه}\qquad\left.\begin{array}{l}(-)\cdot(+)=-\\(+)\cdot(-)=-\end{array}\right\}\text{ مختلف العلامه}$$

مثالها : اعداد ذیل را با هم ضرب نماید.

1) $(+2)\cdot(+3)$

2) $(+5)\cdot(+5)$

3) $(+9)\cdot(+7)$

4) $(+4)\cdot(+8)$

حل :

1) $(+2)\cdot(+3)$

$= (+3)+(+3)$
$= +6$

ضرب عدد 2 با 3 بدین معنـــی اسـت که عدد 3 را دو مرتبه باهم جمع نماید و نتیجه آن یک عدد + میباشـد چون اجرای ضربی + هستند.

2) $(+5)\cdot(+5)$

$= (+5)+(+5)+(+5)+(+5)+(+5)$

$= +25$

3) $(+9)\cdot(+7)$

$= +63$

4) $(+4)\cdot(+8)$

$= +32$

مثالها : اعداد ذیل را با هم ضرب نماید.

5) $(-3)\cdot(+4)$

6) $(-5)\cdot(+2)$

7) $(+6)\cdot(-9)$

8) $(+2)\cdot(-11)$

حل : قبل از اینکه اعداد فوق را با هم ضرب نمایم اثبات منمایم که حاصل ضرب اعداد مثبت با منفی یا منفی با مثبت یک عدد منفی میشود.

به شکل ذیل دقت کنید که به اثبات میرساند حاصل ضرب عدد منفی با مثبت منفی میشود.

عددیکه علامه نداشته باشد علامه آن مثبت است مثلا 5 یا 5 +

جواب به اندازه 5+ کم میشود

$(3)\cdot(5)=+15$

$(+2)\cdot(+5)=+10$

وقتی عدد از 3 به 2 به اندازه یک کم شود

جواب به اندازه 5+ کم میشود

$(+2)\cdot(+5)=+10$

$(+1)\cdot(5)=+5$

عدد از 2 به 1 به اندازه یک کم شود

جواب به اندازه 5+ کم میشود

$(+1)\cdot(+5)=+5$

$(0)\cdot(+5)=0$

وقتی عدد از 1 به 0 به اندازه یک کم میشود

جواب به اندازه 5+ کم میشود

$(-1)\cdot(+5)=-5$

وقتی عدد از 0 به 1- به اندازه یک کم میشود

5) $(-3)\cdot(+4)=-12$

6) $(-5)\cdot(+2)=-10$

چون قانون توزیعی در عملیه ضرب موجود است بنا" حاصل ضرب مثبت با منفی نیز منفی میشود.

7) $(+6)\cdot(-9)=-54$

8) $(+2)\cdot(-11)=-22$

مثالها : اعداد ذیل را با هم ضرب نماید.

9) $(-4)\cdot(-2)$

10) $(-8)\cdot(-6)$

11) $(-3)\cdot(+2)\cdot(+5)$

12) $(0{,}01)\cdot(4)\cdot(-1000)$

حل : قبل از حل مثالها به اثبات میرسانیم که حاصل ضرب اعداد منفی با منفی یک عدد مثبت میشود.

به شکل ذیل دقت کنید که به اثبات میرساند که حاصل ضرب اعداد منفی با منفی مثبت میشود.

وقتی عـــدد ا
به اندازه یک د

$(+3)\cdot(-1)=-3$

جواب به اندازه 1 زیاد میشود

$(+2)\cdot(-1)=-2$

وقتی عدد از 2
به اندازه یک د

جواب به اندازه 1 زیاد مـــیشود

$(+1)\cdot(-1)=-1$

وقتی عدد از 1
به اندازه یک د

جواب به اندازه 1 زیاد میشود

$(0)\cdot(-1)=0$

وقتی عدد از 0
به اندازه یک د

پس جـــــواب به اندازه 1 زیاد میشود

$\underbrace{(-1)\cdot(-1)}=\overline{\underline{+1}}$

بدین اساس ثابت شد که حاصل ضرب منفی با منفی مثبت میشود.

9) $(-4)\cdot(-2)=+8$

10) $(-3)\cdot(-1)=+3$

11) $(-3)\cdot(+2)\cdot(+5)=-6\cdot(+5)=-30$

12) $(0{,}01)\cdot(4)\cdot(-1000)=-10\cdot4=-40$

نوت

حاصـــل ضــرب هرعدد با صفر مساوی به صفر است .

$5\cdot0=0$

ثبوت:

$5\cdot(\underline{2-2})=10-10=0$

علامه منفی در صورتیکه جفت مرتبه با خودش ضرب شود مساوی به مثبت میشود و در صورتیکه طاق مرتبه با خودش ضرب شود مساوی به منفی میشود.

$-\cdot-\cdot-\cdot-=+$

$-\cdot-\cdot-\cdot-\cdot-=-$

و علامه مثبت جفت مرتبه یا طاق مرتبه با خودش ضرب شود مساوی به مثبت میشود.

$+\cdot+\cdot+\cdot+=+$

$+\cdot+\cdot+\cdot+\cdot+=+$

تمرین : اعداد ذیل را با هم ضرب نماید.

1) $(+65)\cdot(+21)$

2) $(-5)\cdot(-11)$

3) $(-40)\cdot\left(+2\frac{3}{5}\right)$

4) $(0{,}01)\cdot(+1000)\cdot(-0{,}1)$

5) $\left(-\frac{12}{15}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{20}{8}\right)$

6) $(4+(-5))\cdot(-5+(4))\cdot\left(0{,}5+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

7) $(-1{,}\bar{1})\cdot(0{,}9)\cdot(+5)-(+5)$

8) $(+20)\cdot(+20)+(+10)\cdot(+5)+10$

9) $-|2|\cdot\left|1\frac{1}{2}\right|\cdot(-3)+(-3)$

10) $(-1)\cdot(+2)\cdot(-3)\cdot5+(-6)\cdot(+7)\cdot(-8)-2\cdot3\cdot5$

عملیه تقسیم اعداد الجبری Division Of Algebraic Number :

در عملیه تقسیم اعداد الجبری همانند عـــملیه ضرب اعداد الجبری اولاً علامه ها را تقـــسیم نموده و بعدا" اعداد را همانند اعداد حسابی با هم تقسیم مینمائیم.

ترتیب تقسیم علامه ها : چون تقـــسیم یک حالت خاص از عملیه ضرب است بنا" حاصـل تقسیم دو عدد هم علامه نیز یک عدد مثبت و حاصل تقسیم دو عدد مختلف العلامه نیز یک عدد منفی می گردد.

$$\left.\begin{matrix}(+)\div(+)=+\\(-)\div(-)=+\end{matrix}\right\}\text{هم علامه}$$

$$\left.\begin{matrix}(-)\div(+)=-\\(-)\div(+)=-\end{matrix}\right\}\text{مختلف العلامه}$$

مثالها : اعداد ذیل را تقسیم نماید.

1) $(+45)\div(+9)$

2) $(+32)\div(+4)$

3) $(-60)\div(-10)$

4) $\left(+\frac{3}{2}\right)\div\left(+\frac{4}{8}\right)$

حل :

1) $(+45)\div(+9)=+5$

2) $(+32)\div(+4)=+8$

3) $(-60)\div(-10)=+6$

چون عملیه تقسیم معکوس عملیه ضرب است پس برای تقسیم یک عدد مانند $\left(+\frac{3}{2}\right)$ بالای عدد دیگر مانند $\left(\frac{1}{2}\right)$ میتوان آن عدد $\left(\frac{3}{2}\right)$ را با معکوس $\left(\frac{1}{2}\right)$ یعنی با $\frac{2}{1}$ ضرب منمایم.

4) $\left(+\frac{3}{2}\right)\div\left(+\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}}\right)=\left(+\frac{3}{2}\right)\div\left(+\frac{1}{2}\right)=\left(+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(+\frac{2}{1}\right)=+3$

مثالها : اعداد ذیل را تقسیم نماید.

5) $\frac{-8}{2}$

6) $28\div -7$

7) $\frac{(-5)\cdot(-16)}{(-4)\cdot(-10)}$

8) $-0{,}001\div 20$

حل :

5) $\frac{-8}{2}=-4$

6) $28\div -7=-4$

7) $\frac{(-5)\cdot(-16)}{(-4)\cdot(-10)}=\frac{+80}{+40}=+2$

8) $-0{,}001\div 20=-0{,}001\cdot\frac{1}{20}=-\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{20}=-\frac{1}{20000}=-0{,}00005$

تمرین : اعداد ذیل را تقسیم نماید.

1) $\frac{25}{-5}$

2) $(-64)\div(-24)$

3) $\frac{(+5)\times(-12)}{-5-7-3}$

4) $\left(10\frac{2}{3}\right)\div\left(\frac{3}{16}\right)$

فصل دوم

طاقت Power

هرگاه یک عدد چندین مرتبه درنفس خودش ضرب گردد آنرا میتوانیم بشکل ساده طاقت طور ذیل بنویسم.

طرزارائه یک طاقت به شکل است که عددیکه چندین مرتبه درنفس خودش ضرب شــده باشد به حیث قاعده تعداد دفعه هائیکه قاعده ضرب شده درقسمت راســت وعلوی قاعده نوشته می شود.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{2^5}$$

توان(نما)

قاعد

طاقت

مثلا" 2^5 را بنام طاقت طوریکه 2 را بنام قاعده و 5 را بنام نـما (توان) یاد می نمایند که نشان میدهد عدد 2 پنج مرتبه با خودش ضرب

تعریف : طاقت عبارت از کوتاه ترین طریقه نشان دادن حاصل ضرب تکراری یک عدد میباشد.

مثالها : حاصل ضرب های ذیل را به شکل طاقت بنویسید.

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

2) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

3) $-2 \cdot -2 \cdot -2$

4) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

5) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$

6) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

حل :

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$

2) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$

3) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6$

4) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^7$

5) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

مثالها : قیمت طاقت های ذیل را دریابید.

1) 2^6

2) $(-3)^4$

3) -5^2

4) 10^9

5) $(-5)^3$

6) 7^1

حل :

1) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

2) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

3) $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

4) $10^9 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000000$

5) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

6) $7^1 = 7$

نوت

هر عددیکه توان نداشته باشد توان آن یک است.

یاداشت : باید به خاطر داشت که:

1) هر عدد منفی به توان جفت مساوی است به یک عدد مثبت.

2) هر عدد منفی به توان طاق مساویست به یک عدد منفی .

3) هر عدد + به توان جفت و طاق مساویـست به یک عدد مثبت.

I. $(-4)^2 = (+4)^2 = |4|^2$

II. $(-4)^3 = -4^3$

III. $(+2)^2 = +2^2$

IV. $(+2)^3 = +2^3$

تمرین :

- حاصل ضرب های ذیل را به شکل طاقت بنویسید.

1) $7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$

2) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$

3) $0{,}1\cdot0{,}1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{20}$

4) $(-11)\cdot11\cdot(-11)\cdot11\cdot11$

5) $0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2$

6) $-5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$

- قیمت طاقت های ذیل را دریابید.

7) 4^3

8) -5^6

9) $\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^4$

10) $0{,}2^4$

قوانین طاقت ها

قانون اول : در عملیه ضرب طاقت ها هر گاه قاعده ها با هم مساوی باشند از قاعده های مساوی یکی را گرفته توان ها با هم جمع می نمائیم .

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

مثالها : حاصل ضرب طاقت های ذیل را دریابید.

1) $2^3 \cdot 2^4$

2) $3^2 \cdot 3^7$

3) $5^5 \cdot 5^6 \cdot 5^7$

4) $9^3 \cdot (-9)^4$

5) $(0,2)^2 \cdot (0,2)^3$

6) $4 \cdot 4^3 \cdot 4^2$

حل :

1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

2) $3^2 \cdot 3^7 = 3^{2+7} = 3^9$

3) $5^5 \cdot 5^6 \cdot 5^7 = 5^{5+6+7} = 5^{18}$

4) $9^3 \cdot (-9)^4 = 9^3 \cdot 9^4 = 9^{3+4} = 9^7$

5) $(0,2)^2 \cdot (0,2)^3 = (0,2)^{2+3} = (0,2)^5$

6) $4 \cdot 4^3 \cdot 4^2 = 4^1 \cdot 4^3 \cdot 4^2 = 4^{1+3+2} = 4^6$

یاداشت : معکوس این قانون را نیز بخاطر داشته باشید یعنی هرگاه یك عدد به توان یك حاصل جمع باشد میتوان آنرا به شکل حاصل دو طاقت تجزیه کرد .

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

تمرین : حاصل ضرب طاقت های ذیل را دریابید.

1) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^5$

2) $3^3 \cdot 3^{12}$

3) $2^3 \cdot 3^2$

4) $5^4 \cdot 5^2 \cdot 5^5$

5) $2^{99} \cdot 2^{91}$

6) $7^3 \cdot 7^3$

قانون دوم : درعملیه ضرب طاقت ها هرگاه قاعده ها با هم مختلف و توان ها با هم مساوی باشند از توان ها یکی را گرفته قاعده ها را با هم ضرب می نمائیم .

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

مثالها : حاصل ضرب طاقت های ذیل را دریابید.

1) $2^3 \cdot 5^3$

2) $3^2 \cdot 2^2$

3) $-2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

4) $11^4 \cdot 7^4$

5) $10^9 \cdot (0,1)^9$

6) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$

حل :

1) $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$

2) $3^2 \cdot 2^2 = (3 \cdot 2)^2 = 6^2$

3) $-2^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)^2 = -1^2 = -1$

4) $11^4 \cdot 7^4 = (11 \cdot 7)^4 = 77^4$

5) $10^9 \cdot (0{,}1)^9 = (10 \cdot 0{,}1)^9 = 1^9 = 1$ عدد یک به هر توان مساویست به یک

6) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}_{1}}\right)^2 = 2^2 = 4$

یادداشت : برای رفع یك حاصل ضرب به یك توان توان مذکور را بر هر جز ضربی مینویسیم.

$(a \cdot b)^n = a^n . b^n$

احتیاط:

$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

تمرین : حاصل ضرب طاقت های ذیل رادریابید.

1) $3^9 \cdot 4^9$

2) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$

3) $6^5 \cdot 7^5$

4) $0{,}001^9 \cdot 10^9$

5) $2^3 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

6) $|8|^8 \cdot 4^4$

قانون سوم : در عملیه تقسیم طاقت ها هرگاه قاعده های آنها با هم مساوی باشند از قاعده مساوی یکی را گرفته از توان صورت توان مخرج را تفریق مینمایم.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ طوریکه $a \neq 0$

مثالها :حاصل تقسیم طاقت های ذیل را دریابید.

1) $\frac{2^4}{2^3}$

2) $\frac{5^5}{5^2}$

3) $\frac{7^8}{7^5}$

4) $\frac{3^4}{3^{-2}}$

5) $\frac{6^5}{6^5}$

6) $\frac{2^5}{2^7}$

حل :

1) $\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$

2) $\frac{5^5}{5^2} = 5^{5-2} = 5^3$

3) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^8}{\left(\frac{1}{3}\right)^5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

4) $\frac{3^4}{3^{-2}} = 3^{4-(-2)} = 3^{4+2} = 3^6$

نوت : هر عدد به توان صفر مساویست به یک به استثنای خود صفر.

$a^0 = 1$ طوریکه $a \neq 0$

$3^0 = 1$

یاداشت :
0^0 تعریف ناشده است.

ثبوت : برای ثبوت دو رابط ذیل را در نظر میگیریم.

$\frac{5^4}{5^4} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}} = 1$ i

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0 \quad \ldots\ldots \quad .ii$$

چون طرف چپ رابط های ii , i با هم مساوی اند پس طرف راست آنها را نیز با هم مساوی قرار میدهیم.

بدین اساس

$$5^0 = 1$$

5) $\frac{6^5}{6^5} = 6^{5-5} = 6^0 = 1$

6) $\frac{2^5}{2^7} = 2^{5-7} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

به صفحه 30 مراجعه نماید.

تمرین :

1) $\frac{9^{30}}{9^{20}}$

2) $\frac{0,2^3}{\left(\frac{1}{5}\right)^5}$

3) $\frac{(-4)^{11}}{(-4)^8}$

4) $\frac{(-8)^{12}}{8^7}$

قانون چهارم : در عملیه تقسیم طاقت ها هرگاه قاعده ها با هم مختلف و توان ها مساوی باشند از توان های مساوی یکی را گرفته قاعده ها را تقسیم منمایم.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{طوریکه} \quad b \neq 0$$

مثالها :

1) $\frac{6^3}{2^3}$

2) $\frac{10^2}{5^2}$

3) $\frac{(0,1)^5}{(0,01)^5}$

4) $\frac{8^4}{4^4}$

5) $\frac{15^4}{3^4}$

6) $\frac{30^7}{10^7}$

حل :

1) $\frac{6^3}{2^3} = \frac{6\cdot6\cdot6}{2\cdot2\cdot2} = \frac{6}{2}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{6}{2} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3 = 27$

2) $\frac{10^2}{5^2} = \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 2^2 = 4$

3) $\frac{8^4}{4^4} = \left(\frac{8}{4}\right)^4 = 2^4 = 16$

4) $\frac{15^4}{3^4} = \left(\frac{15}{3}\right)^4 = 5^4 = 625$

5) $\frac{(0,1)^5}{(0,01)^5} = \left(\frac{0,1}{0,01}\right)^5 = 10^5 = 100000$

6) $\frac{30^7}{10^7} = \left(\frac{30}{10}\right)^7 = 3^7$

یادداشت : برای رفع یک حاصل تقسیم به یک توان توان مذکور را بر هر جز تقسیم مینویسیم.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

تمرین : حاصل تقسیم طاقت های ذیل را دریابید.

1) $\frac{5^3}{15^3}$

2) $\frac{14^3}{-7^3}$

3) $\frac{(1.2)^3}{(10)^{-3}}$

4) $\frac{24^7}{24^7}$

قانون پنجم : هر عدد به نمای منفی مساویست به معکوس همان عدد به نمای مثبت.

$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ طوریکه $a \neq 0$

مثالها : طاقت های ذیل را ساده سازید.

1) 4^{-9}

2) 2^{-4}

3) $\frac{5^{-1}}{3}$

4) $7 \cdot 2^{-3}$

5) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

6) $\frac{4^{-5}}{7^{-4}}$

حل :

1) $4^{-9} = \frac{1}{4^9}$

2) $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

3) $\frac{5^{-1}}{3} = \frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15}$

4) $7 \cdot 2^{-3}$

5) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

6) $\frac{4^{-5}}{7^{-4}} = \frac{7^4}{4^5}$

تمرین : قیمت طاقت های ذیل را دریابید.

1) 11^{-4}

2) $\dfrac{9}{3^{-3}}$

3) $0{,}2^{-2}$

4) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1}$

قانون ششم : هرگاه یک عدد بیش از یک توان داشته باشد توان ها را با هم ضرب مینمایم.

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

مثالها : طاقت های ذیل را دریابید.

1) $\left(2^3\right)^4$

2) $\left(5^2\right)^5$

3) $\left(10^7\right)^6$

4) $\left(8^8\right)^{10}$

حل :

1) $\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

چون $\left(2^3\right)^4 = \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) \cdot \left(2^3\right) = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$

2) $\left(5^2\right)^5 = 5^{2 \cdot 5} = 5^{10}$

3) $\left(10^7\right)^6 = 10^{7 \cdot 6} = 10^{42}$

4) $\left(8^8\right)^{10} = 8^{8 \cdot 10} = 8^{80}$

یاداشت :

$$2^{5^3} \neq 2^{5 \cdot 3}$$

چون توان 3 تنها مربوط به 5 بوده مربوط به 2 نمیباشد بنا"

$$2^{5^3} = \left(2\right)^{5 \cdot 5 \cdot 5} = 2^{125}$$

تمرین : طاقت های ذیل را ساده سازید.

1) $\left(15^{-3}\right)^9$

2) $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^7\right)^{11}$

3) $\left(\left(\left(9^6\right)^8\right)^0\right)^3$

4) $\left(\left(10^{10}\right)^4\right)^{-2}$

نوت : برای جمع و تفریق کردن اعداد توان دار (طاقت ها) قاعده خاصی وجود ندارد بنا" جهت حل همچو سوالات اولا" طاقت ها را رفع نموده بعداً اعداد را با هم جمع و تفریق می نمائیم .

مثالها : طاقت های ذیل را با هم جمع و تفریق نماید.

1) $2\cdot 5^2+3^4-2^6$

2) $4\cdot 2^3+2^3-3\cdot 2^3$

3) $\dfrac{3^{34}+9^{16}}{81^8+6\cdot 27^{11}}$

حل :

1) $2\cdot 5^2+3^4-2^6=2\cdot(5\cdot 5)+(3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)-(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)=2\cdot 25+81-64=50+81-64=67$

2) $4\cdot 2^3+2^3-3\cdot 2^3$

قبل از حل سوال باید به خاطر داشت که اعداد توان داریکه دارای توان و قاعده مساوی اند بنام اعداد توان دار مشابه یاد میشود که میتوانیم اعداد توان دار مشابه را جمع و تفریق نمایم.

ترتیب جمع و تفریق اعداد توان دار مشابه : در جمع اعداد توان دار مشابه صرفا" ضرایب انها را با هم جمع می نمایم.

مثلا" :

I. $x^2+3x^2=(3+1)x^2=4x^2$

II. $5\cdot 2^{50}+2\cdot 2^{50}=(5+2)\cdot 2^{50}$

2) $4\cdot 2^3+2^3-3\cdot 2^3=(4+1-3)\cdot 2^3=2\cdot 2^3=2\cdot 8=16$

3) $$\frac{3^{34}+9^{16}}{-81^{8}+2\cdot27^{11}}=\frac{3^{2}\cdot3^{32}+\left(3^{2}\right)^{16}}{2\cdot\left(3^{3}\right)^{11}-\left(3^{4}\right)^{8}}=\frac{9\cdot3^{32}+3^{32}}{2\cdot3^{33}-3^{32}}=\frac{(9+1)\cdot3^{32}}{2\cdot3\cdot3^{32}-3^{32}}=\frac{10\cdot\cancel{3^{32}}}{(6-1)\cdot\cancel{3^{32}}}=\frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}=2$$

خلاصه خواص طاقت ها :

اگر a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد تام باشند.

خواص	مثالها
1) $a^{m}\cdot a^{n}=a^{m+n}$	$2^{2}\cdot2^{3}=2^{3+2}=2^{5}$
2) $a^{n}\cdot b^{n}=(a\cdot b)^{n}$	$2^{2}\cdot3^{2}=(2\cdot3)^{2}=6^{2}$
3) $\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$, $a\neq0$	
$\frac{3^{4}}{3^{2}}=3^{4-2}=3^{2}=9$	
4) $\frac{a^{m}}{b^{m}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{m}$, $b\neq0$, $a\neq0$	$\frac{6^{3}}{3^{3}}=\left(\frac{6}{3}\right)^{3}=2^{3}=8$
5) $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$, $a\neq0$	$5^{-2}=\frac{1}{5^{2}}=\frac{1}{25}$
6) $a^{0}=1$, $a\neq0$	$4^{0}=1$
7) $(a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}$	$(2\cdot3)^{2}=2^{2}\cdot3^{2}$
8) $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{m\cdot n}$	
$\left(2^{3}\right)^{2}=2^{3\cdot2}$	
9) $\left(\frac{a}{\ }\right)^{m}$ a^{m}	$\left(\frac{6}{\ }\right)^{2}$ 6^{2}

ارایه علمی اعداد scientific notation

طاقت یک راه موثر را برای نوشتن اعداد بسیار بزرگ و بسیار کوچک فراهم ساخته است یعنی اگر اعداد بسیار بزرگ مانند کتله آفتاب (به کیلو گرام) که تقریبا" 2 نونلیون (2 با 30 صفر) و تعداد مالیکول های آب در یک قطر آب که به 33 کونتلیون (33 با 18 صفر) میرسد ویا هم اعداد بسیار کوچک مانند کتله الکترون (به گرام) که تقریبا" 0,0000000000000000000000000009 است درنظربگیریم نوشتن این نوع اعداد و یا هم محاسبات بالای این نوع اعداد دور از اشتباهات نیست بنا" برای جلوگیری از اشتباهات و اطمینان بیشتر میتوان این نوع اعداد را به شکل مختصر $(\pm a\cdot 10^n)$ طوریکه $1\le a<10$ و n یک عدد تام باشد ارایه کرد که این شکل ارایه اعداد را بنام ارایه علمی اعداد یاد مینمایند البته به یاد داشته باشید که توان + دلالت به بزرگ بودن عدد و توان − دلالت به کوچک بودن عدد مینماید.

مثال 1 : کتله آفتاب را به شکل علمی بنوسید.

1) $2000000000000000000000000000000\,kg \;=\; 2\cdot 10^{30}\,kg$

مثال 2 : تعداد مالیکول های آب در یک قطره آب را به شکل علمی آن بنوسید.

2) $33000000000000000000 \;=\; 3{,}3\cdot 10^{19}$

مثال 3 : کتله الکترون را به شکل علمی آن بنوسید.

3) $0{,}0000000000000000000000000009\,gr = 9\cdot 10^{-28}\,gr$

مثالها : اعداد ذیل را به شکل علمی ان بنوسید.

4) 50000000000

5) 4300000000

6) 789789789

7) -578402

حل :

4) $50000000000 = 5 \cdot 10^{10}$

5) $4300000000 = 4{,}3 \cdot 10^{9}$

احتیاط :

$43 \cdot 10^{8}$ شکل علمی عدد 4300000000 نیست چون 43 عدد بزرگ است نسبت به 10 درحالیکه ضریب همیشه باید کوچک از 10 باشد.

6) $789789789 = 7{,}89789789 \cdot 10^{8}$

7) $-578402 = -5{,}78402 \cdot 10^{5}$

مثالها : اعداد ذیل را به شکل علمی آن بیوسید.

8) $0{,}29134$

9) $4782{,}1 \cdot 10^{2}$

10) $\frac{37}{4}$

11) $123 \cdot 10^{5}$

12) $54{,}7 \cdot 10^{2}$

حل :

8) $0{,}29134 = 2{,}9134 \cdot 10^{-1}$

9) $4782{,}1 \cdot 10^{2} = 4{,}7821 \cdot 10^{5}$

10) $\frac{37}{4} = 9{,}25$

چون **9.25** خود عدد کوچک از 10 است بنا" شکل علمی آن خود آن است ویا هم میتوان نوشت که $9{,}25 \cdot 10^{0}$ و $10^{0} = 1$ پس $9{,}25 \cdot 1$ مساویست به $9{,}25$.

11) $123 \cdot 10^{5} = 1{,}23 \cdot 10^{7}$

12) $54{,}7 \cdot 10^{2} = 5{,}47 \cdot 10^{3}$

تمرین : اعداد نیل را به شکل علمی آن بنوسید.

1) 1200000000000
2) 33330200000
3) 0,00000000002
4) 234512345689

فصل سوم

جذر Root

زمانیکه ما یک عدد حقیقی مانند 3 را به یک توان مانند 2 بالا میبریم یک عدد مانند 9 نتیجه میشود ولی بعضاً ضرورت میشود تا دریابیم که کدام عدد به توان 2 رفع شده تا 9 نتیجه شده است که این مرحله را در یافتن جذر 2 ام 9 یاد مینمایند که بنام جذر مربع 9 نامیده میشود و دلالت به یکی از دو فکتور های ضربی یکسان 9 میکند به مثالهای ذیل توجه کنید .

	جذر	فکتور های ضربی یکسان	عدد
(جذر دوم)	(-2) (2)	$(-2)(-2)$ $(+2)(+2)$	4
(جذر سوم)	(-3)	$(-3)(-3)(-3)$	-27
(جذر چهارم)	3	$3\cdot3\cdot3\cdot3$	81

جذر دوم را بنام جذر مربع و جذر سوم را بنام جذر مکعب یاد مینمایند.

با مشاهده مثالهای فوق یک مفکوره ایجاد میشود که جذر بعضی اعداد مثبت + و − بوده میتواند مانند جذر مربع 4 که 2 و 2- بوده که + آن جذر عمده بوده وتوسط علامه $\left(\sqrt[n]{\ }\right)$ و − آن جذر غیر عمده بوده توسط ($-\sqrt[n]{\ }$) ارائه میگردد و برای جذر عمده وغیر عمده علامه ($\pm\sqrt[n]{\ }$) استفاده میشود.

اصطلاحات جذری :

$$\left(\ \sqrt[n]{a}\ \right)$$

$\sqrt{\ }$ علامه جذر

n درجه جذر

a مجذور (عدد تحت جذر)

احتیاط:-

جذر عمده یک عدد منفی بوده نمی تواند و تنها یک عدد مجرد میباشد.

$$\sqrt[2]{25} = \pm 5 \quad ✗$$

$$\sqrt[2]{25} = +5 \quad ✓$$

یاداشت :- به خاطر داشته باشید جذر یکه درجه نداشته باشد درجه آن جذر 2 می باشد.

$$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$$

مثال ها:- جذر مربع اعداد ذیل را دریابید.

3) $-\sqrt{16}$

4) $\sqrt{9}$

1) $\sqrt{4}$

2) $\sqrt{36}$

حل :-

1) جذر مربع 4 عبارت از $2 = \sqrt{4}$ است　　چون $2^2 = 4$

2) جذر مربع 36 عبارت از $6 = \sqrt{36}$ است　　چون $6^2 = 36$

3) جذر مربع غیر عمده 16 عبارت از $-4 = -\sqrt{16}$ است.　　چون $4^2 = 16$

4) جذر مربع 9 عبارت از $3 = \sqrt{9}$ است.　　چون $3^2 = 9$

مثالها : جذر اعداد ذیل را دریابید.

6) $\sqrt[5]{-32}$

5) $\sqrt[3]{-8}$

7) $\sqrt[3]{64}$

8) $\sqrt[4]{-16}$

حل :

5) $\sqrt[3]{-8} = -2 \Rightarrow$ چون $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

6) $\sqrt[5]{-32} = -2 \Rightarrow$ چون $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -32$

7) $\sqrt[3]{64}=4$

8) $\sqrt[4]{-16}$ دارای جذر حقیقی نبوده چون نتیجه ضرب هیچ عدد + یا – نمتواند جفت مرتبه – باشد

نوت : اگر $a=b^n$ باشد طوریکه a یک عدد حقیقی و n یک عدد تام باشد پس داریم که:

1. که b جذر n ام عدد a بوده و b اگر n عدد جفت باشد دارای دو قیمت حقیقی مثبت و منفی بوده میتواند که توسط $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ ارائه میگردد.
2. که b جذر n ام عدد a بوده و b اگر n عدد طاق باشد دارای یک قیمت حقیقی بوده که توسط $\sqrt[n]{a}$ ارائه میگردد.

توان کسری: توان کسری یک عدد جذر تعریف شده است یعنی $a^{\frac{m}{n}}$ طوریکه m,n اعداد طبعی و a یک عدد حقیقی باشد مساویست به $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

استخراج جذر مربع اعداد

دو طریقه برای استخراج جذر مربع اعداد موجود است.

1) طریقه عمومی :

❖ برای استخراج جذرمربع اعداد طبعی اولا" اعداد را از راست به چپ دو دو خانه جدا نموده آخرین عدد یا جوره اعداد را درنظر گرفته عدد را جستجو مینمایم که با خودش دو مرتبه ضرب شده و حاصل ضرب یا مساوی به عدد در نظر گرفته شده و یا هم کوچکتر از آن باشد بعدا" آن عدد را دو مرتبه ضرب نموده و حاصل ضرب را از عدد در نظر گرفته شده تفریق مینمایم و به تعقیب آن دو رقم بعدی را پایان نموده و پهلوی حاصل تفریق نوشته آنرا در نظر گرفته و رقم یکها عدد طرف چپ را دو چند کرده به حیث عدد ده ها یا صدها در سمت چپ قرار داده و عدد را برای خانه یکها جستجو مینمایم که حاصل ضرب یا مساوی ویا کوچک از اعداد درنظر گرفته شده شود و عملیه را به همین ترتیب تا به اخیر ادامه میدهیم و در صورتیکه عدد جذر مکمل نداشته باشد برای جذر تقریبی اعداد اعشاریه گذاشته و در هر مرتبه دو صفر پایان منمایم.

مثالها : جذر مربع اعداد ذیل را دریابید.

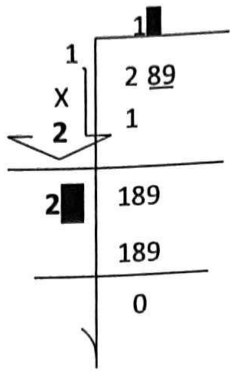
1) $\sqrt{289}$ 2) $\sqrt{10404}$

4) $\sqrt{7}$

3) $\sqrt{121801}$

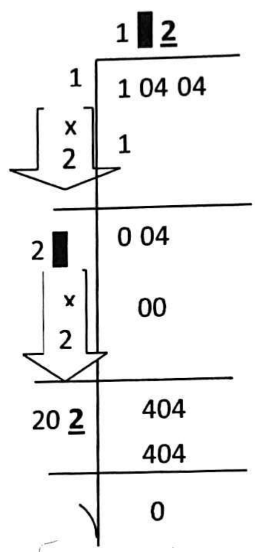
حل :

1) $\sqrt{289}$ $\Longrightarrow$



پس $\sqrt{289} = 17$

2) $\sqrt{10404}$ $\Longrightarrow$



$\sqrt{10404} = 102$

9) $\sqrt{121801}$

تمرین: جذر مربع اعداد ذیل را دریابید.

1) $\sqrt{324}$

2) $\sqrt{7744}$

3) $\sqrt{21025}$

4) $\sqrt{4004001}$

5) $\sqrt{102}$

6) $\sqrt{412,130601}$

❖ برای استخراج جذر اعداد اعشاری ارقام صحیح اعداد اعشاری را از راست به چپ و ارقام اعشاری آن را از چپ به راست دو دو خانه جدا نموده و عملیه را عینا" مانند اعداد تام + انجام میدهیم و در موقع برخورد با علامه اعشاری آنرا به بالا انتقال میدهیم.

مثالها: جذر اعداد ذیل را دریابید.

1) $\sqrt{0,0025}$

2) $\sqrt{0,01}$

3) $\sqrt{6,25}$

4) $\sqrt{12,32}$

تمرین: جذر مربع اعداد ذیل را دریابید.

1) $\sqrt{0,000004}$

2) $\sqrt{77,44}$

3) $\sqrt{10,001}$

4) $\sqrt{1310,44}$

2) **طریقه تجزیه:** برای دریافت جذر مربع اعداد به این طریقه اعداد مذکور را به عوامل ضربی اولیه آن تجزیه نموده و از هر دو عامل ضربی یکسان یکی انرا گرفته بین هم ضرب مینمایم.

مثالها: جذر اعداد ذیل را دریابید.

1) $\sqrt{36}$

2) $\sqrt{100}$

3) $\sqrt{256}$

4) $\sqrt{14400}$

ساده ساختن جذور

جذور ساده دارای خصوصیات ذیل اند .

1. درجه جذر به حد اقل کاهش داده شده باشد.

2. مجذور دیگر دارای کدام فکتور نباشد که از جذر خارج شده بتواند . برای ساده ساختن جذور ؛ مجذور را به عوامل ضربی آن تجزیه نموده در صورت امکان آنرا از جذر خارج نمائید.

3. عدد زیر جذر به شکل کسری نباشد که برای دور ساختن آن از ناطق سازی استفاده مینمایم.

مثالها:- جذور ذیل را ساده سازید .

1) $\sqrt[2]{48}$

2) $\sqrt{8}$

3) $\sqrt[3]{24}$

4) $\sqrt[2]{75}=\sqrt[2]{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$

5) $\sqrt[5]{-64}$

6) $\sqrt[3]{-40}$

به یاد داشته باشید که توان مجذور و درجه جذر را در صورت امکان اختصار کرده متوانیم.

1) $\sqrt[2]{48}=\sqrt[2]{2^4\cdot 3}=\sqrt[\overset{1}{\cancel{2}}]{2^{\overset{2}{\cancel{4}}}}\cdot\sqrt[2]{3}=4\sqrt{3}$

2) $\sqrt{8}=\sqrt[2]{2^3}=\sqrt[2]{2^2\cdot 2}=\sqrt[2]{2^2}\cdot\sqrt[2]{2}=2\sqrt{2}$

3) $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

4) $\sqrt[2]{75}=\sqrt[2]{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$

5) $\sqrt[5]{-64}=\sqrt[5]{-32\cdot 2}=\sqrt[5]{(-2)^5}\cdot\sqrt[5]{2}=-2\sqrt[5]{2}$

6) $\sqrt[3]{-40}=\sqrt[3]{-8\cdot 5}=\sqrt[3]{-2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=-2\sqrt[3]{5}$

تمرین: جذر های ذیل را ساده سازید.

1) $\sqrt{200}$

2) $\sqrt{54}$

3) $\sqrt{50}$

4) $\sqrt{2^4\cdot 3^2}$

5) $\sqrt[3]{300}$

6) $\sqrt[5]{300000}$

داخل نمودن ضریب در داخل جذر: برای داخل نمودن ضریب یک جذر در داخل آن ضریب را به اندازه درجه جذر به توان بالا برده و داخل جذر منمایم.

مثالها : ضریب جذر های ذیل را داخل جذر نماید.

1) $3\sqrt{2}$

2) $2\sqrt{5}$

3) $-7\sqrt{3}$

4) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$

حل:

1) $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$

2) $2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{20}$

3) $-7\sqrt{3} = -\sqrt{7^2 \cdot 3} = -\sqrt{49 \cdot 3} = -\sqrt{147}$

علامه منفی داخل جذر یکه درجه جفت داشته باشد **نمیشود.**

4) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 4} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \cdot 4} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

تمرین : ضریب جذرهای ذیل را در جذر داخل نماید.

1) $4\sqrt{11}$

2) $-3\sqrt[3]{6}$

3) $-4\sqrt{3}$

4) $5\sqrt{10}$

همدرجه ساختن جذور: برای همدرجه ساختن جذور اولا" LCM درجه های جذور داده شده را دریافت نموده بعدا" آنرا به حیث درجه جدید تمام جذور انتخاب نموده و درجه انتخاب شده راتقسیم درجه اولی جذور نموده و حاصل تقسیم را به توان مجذورهمان جذر ضرب مینمایم.

1) جذور $\sqrt[2]{5}$ و $\sqrt[3]{2}$ را همدرجه بسازید.

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[2]{5}$ $\Big\}$ $\sqrt[6]{2^2}$, $\sqrt[6]{5^3}$

LCM (2, 3) =6

2) جذور $\sqrt[3]{3}$ و $\sqrt[9]{9}$ را همدرجه سازید.

$\sqrt[9]{9}$, $\sqrt[3]{3}$ $\Big\}$ $\sqrt[9]{9}$, $\sqrt[9]{3^3}$

LCM (9, 3) =9

3) جذور $\sqrt{7}$ و $\sqrt[6]{5}$ را همدرجه سازید.

$\sqrt[2]{7}$, $\sqrt[6]{5}$ $\Big\}$ $\sqrt[6]{7^3}$, $\sqrt[6]{5}$

LCM (2, 6) =6

تمرین:جذور ذیل را با هم ههمدرجه سازید.

1) $\sqrt{11}$ $\sqrt[3]{6}$

2) $\sqrt[5]{3}$ $\sqrt[15]{2}$

3) $\sqrt[6]{2^3}$ $\sqrt{2}$

4) $\sqrt[8]{9}$ $\sqrt[4]{4}$

مقایسه جذر ها : برای مقایسه جذور در صورتیکه جذور هم درجه باشند مجذور را در نظر گرفته یعنی هر جذریکه دارای مجذور بزرگ باشد همان جذر بزرگ است و درصورتیکه جذور دارای درجه های مختلف و مجذورهای یکسان باشند جذر بزرگ است که دارای درجه کوچک باشد و اگر جذور دارای درجه ها و مجذور های مختلف باشند اولا" آنها را همدرجه ساخته بعدا" با هم مقایسه منمایم.

مثالها : جذور ذیل را با هم مقایسه نماید.

1) $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$

2) $\sqrt[4]{21}$, $\sqrt[4]{21}$

3) $\sqrt[3]{-4}$, $\sqrt[3]{-5}$

4) $\sqrt[2]{2}$, $\sqrt[3]{3}$

حل :

1) $\sqrt{5} < \sqrt{11}$

2) $\sqrt[3]{21} > \sqrt[4]{21}$

3) $\sqrt[3]{-4} > \sqrt[3]{-5}$

4) $\sqrt[3]{2}\ ,\ \sqrt[3]{3} \Rightarrow \sqrt[6]{2^3}\ ,\ \sqrt[6]{3^2} \Rightarrow \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$

تمرین: جذور ذیل را با هم مقایسه نمایید.

1) $\sqrt{46}$ $\quad 4\sqrt{2}$

2) $\sqrt{5^3}$ $\quad 5\sqrt{5}$

3) $\sqrt[3]{-7}$ $\quad \sqrt{24}$

عملیات بالای جذور

عملیه ضرب جذور: در عملیه ضرب جذور دو حالت ذیل را در نظر میگریم .

1) در عملیه ضرب جذور هرگاه جذور دارای درجه ها یکسان باشند از جذور یکی را گرفته و مجذور ها را با هم ضرب مینمایم .

مثالها :

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$

2) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$

3) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

4) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}$

5) $\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}$

حل :

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5\cdot 2}=\sqrt{10}$

2) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{7\cdot 3\cdot 2}=\sqrt{42}$

3) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{15\cdot 2\cdot 2}=\sqrt{4\cdot 15}=2\sqrt{15}$

4) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{8^2\cdot 3^2}=8\cdot 3=24$

5) $\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3\cdot 11\cdot 6}=\sqrt{3^2\cdot 22}=3\sqrt{22}$

2. هرگاه جذور دارای درجه های مختلف باشند اولاً آنها را همدرجه ساخته بعداً باهم ضرب مینمایم.

مثالها :- جذور ذیل را با هم ضرب نمائید.

1, $\sqrt[2]{3}\cdot\sqrt[3]{2} \Rightarrow \sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{2^2} \Rightarrow \sqrt[6]{108}$

2, $\sqrt[5]{11}\cdot\sqrt[2]{10}\cdot\sqrt[5]{3} \Rightarrow \sqrt[10]{11^2}\cdot\sqrt[10]{10^5}\cdot\sqrt[10]{3^2} \Rightarrow \sqrt[10]{1089\cdot 10^5}$

نوت : معکوس این عملیه را نیز به خاطر داشته باشید یعنی هرگاه یک حاصل ضرب تحت یک جذر قرار داشته باشد میتوان انرا به حاصل ضرب جذور تجزیه نمود .

1. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{6}$
2. $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

احتیاط:-

1. $\sqrt{x^2+y^2}\neq\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$
2. $\sqrt[3]{a^3-b^3}\neq a-b$

تمرین: جذور ذیل را باهم ضرب نماید.

1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$

2) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{27}$

3) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}$

4) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}$

عملیه تقسیم جذور: در عملیه تقسیم همچنان دو حالت را در نظر میگریم .

الف: هرگاه جذور باهم همدرجه باشند مجذور ها را تقسیم نموده تحت یک جذر مینوسیم.

مثالها : جذور ذیل را بالای هم تقسیم نماید.

1) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

2) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

4) $\frac{\sqrt[8]{21}}{\sqrt[8]{7}}$

حل :

1) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$

2) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3$

3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{16}{2}}=\sqrt[3]{8}=2$

4) $\frac{\sqrt[8]{21}}{\sqrt[8]{7}}=\sqrt[8]{\frac{21}{7}}=\sqrt[8]{3}$

ب: هرگاه جذور دارای درجه های مختلف باشند مجذور را همدرجه ساخته بعداً تقسیم مینمایم.

مثالها:

1, $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{5^3}}=\sqrt[6]{\frac{16}{125}}$

2, $\frac{\sqrt[4]{112}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[12]{112^3\cdot 2^{-4}}$

نوت:- معکوس این عملیه را به خاطر داشته باشید هر گاه یک حاصل تقسیم تحت یک جذر باشد میتوان انرا به حاصل تقسیم جذور تجزیه نمود.

1, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 2, $\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

تمرین: جذور ذیل را تقسیم نماید.

1) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

2) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

3) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{50}}$

4) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$

عملیه جمع و تفریق جذور : عملیه جمع و تفریق را تنها بالای جذور مشابه میتوان انجام داد بنا" لازم است تا قبل ازاجرای عملیه ها جمع وتفریق بالای جذوربا موضوع جذورمشابه و غیره مشابه اشنا شویم.

جذورمشابه وغیر مشابه :

جذورمشابه اند که دارای مجذورها یکسان ودرجه های یکسان باشند یعنی برای مشابه بودن جذور دوشرط کفایت میکند.

الف. هم درجه بودن حذور .

ب. مجذور های یکسان.

مثلاً : جذور $\sqrt{5}$ و $\sqrt{5}$ باهم مشابه اند چون دارای مجذور و درجه های یکسان اند .

جذور $3\sqrt{2}$ و $\sqrt{8}$ با هم مشابه اند.

جذور $3\sqrt{5}$ و $4\sqrt[3]{5}$ با هم مشابه نیستند چون دارای درجه های مختلف اند .

مثالها : جذور ذیل را با هم جمع و تفریق نمائید .

1) $\sqrt{2}+\sqrt{2}=(1+1)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

2) $3\sqrt{5}+2\sqrt{5}+\sqrt{80}=5\sqrt{5}+4\sqrt{5}=9\sqrt{5}$

3) $\sqrt{2}-\sqrt{8}=\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}$

4) $\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

5) $\sqrt{12}+2\sqrt{3}-\sqrt{27}=\sqrt{4\cdot3}+2\sqrt{3}-\sqrt{9\cdot3}=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

دقت نماید که در جمع و تفریق جذور اولا" جذر ها را به شکل ساده آن تبدیل نموده بعد با هم جمع منمایم.

تمرین: جذور ذیل را با هم جمع نماید.

1) $\sqrt{18}+\sqrt{2}+\sqrt{50}$

2) $5\sqrt{6}-\sqrt{54}$

3) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

4) $\sqrt{2}-\sqrt{8}$

جذرالجذر: هر گاه یک جذر تحت یک یا چند جذردیگر قرار داشته باشد چنین افاده را جذرالجذر گویند.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

برای ساده ساختن جذرالجذر طوری ذیل عمل منمایم.

مثالها: جذرالجذر های ذیل را ساده سازید.

1) $\sqrt{\sqrt{2}}$

3) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$

2) $\sqrt{2\sqrt{2}}$

4) $\sqrt[3]{\sqrt{5\sqrt{2}}}$

حل:

برای ساده ساختن این جذرالجذر درجه ها ان را با هم ضرب منمایم.

1) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

در این جذرالجذر اولا" عدد بین جذرها را به داخل انتقال داده باز با هم درجه ها انرا ضرب منمایم.

2) $\sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

3) $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[12]{3}$

4) $\sqrt[3]{2\sqrt{5\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 5\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2^5 \cdot 5^2}}} = \sqrt[12]{2^5 \cdot 5^2}$

تمرین: جذرالجذرهای ذیل را ساده سازید.

1) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

2) $\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3}}}$

جذور مرکب : هرگاه یک عدد با یک جذر ویا چندین جذر غیر مشابه ولی همدرجه با یکدیگر توسط عملیه های جمع و تفریق ارتباط داشته باشند بنام جذور مرکب یاد میشود.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{5}$

عملیات بالای جذور مرکب

عملیه جمع و تفریق جذور مرکب: قراریکه قبلا" در جمع و تفریق جذور مجرد مطالعه نمودیم که تنها جذور مشابه با هم جمع و تفریق شده میتوانند پس با در نظر داشت این موضوع جذور مرکب را با هم طور ذیل جمع و تفریق منمایم.

مثالها: جذور مرکب ذیل را با هم جمع و تفریق نماید.

1) $A = 3 + 2\sqrt{5}$
$B = 2 - \sqrt{5}$

2) $A=\sqrt{3}+\sqrt{18}-2$

$B=\sqrt{12}+3\sqrt{2}-4$

حل:

1)
$$\begin{array}{l} A=3+2\sqrt{5} \\ B=2-\sqrt{5} \\ \hline A+B=5+\sqrt{5} \end{array}$$
(الف

$$\begin{array}{l} A=3+2\sqrt{5} \\ B=\pm 2\mp\sqrt{5} \\ \hline A-B=1+3\sqrt{5} \end{array}$$
(ب

2)
$$\begin{array}{l} A=\sqrt{3}+\sqrt{18}-2 \\ B=\sqrt{12}+3\sqrt{2}-4 \\ \hline A+B=3\sqrt{3}+6\sqrt{2}-6 \end{array}$$
(الف

$$\begin{array}{l} A=\sqrt{3}+\sqrt{18}-2 \\ B=\pm\sqrt{12}\pm 3\sqrt{2}\mp 4 \\ \hline A-B=-\sqrt{3}+6 \end{array}$$
(ب

عملیه ضرب جذور مرکب : در عملیه ضرب جذور مرکب هر یک از حدود یکی از جذور را با تمام حدود جذور دیگر ضرب نموده و نتیجه را در صورت امکان با هم جمع و تفریق منمایم.

مثالها: جذور مرکب ذیل را با هم ضرب نماید.

1) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$

2) $\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)$

3) $\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)$

حل :

1) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)=\sqrt{36}-\cancel{\sqrt{30}}+\cancel{\sqrt{30}}-\sqrt{25}=6-5=1$

2) $\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=\sqrt{121}-\cancel{\sqrt{77}}+\cancel{\sqrt{77}}-\sqrt{49}=11-7=4$

3) $\left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{6}-1\right)=2\sqrt{6}-2+\sqrt{18}-\sqrt{3}$

ناطق سازی مخرج جذور :

دور نمودن جذر از مخرج یک افاده کسری بنام ناطق سازی مخرج یاد میشود برای ناطق سازی کسور حالات ذیل رامطالعه مینمایم.

حالت اول:- اگر مخرج دارای یک جذر مجرد باشد برای ناطق سازی صورت و مخرج کسر رانظر به ضرورت مخرج ضرب عدد جذری(عامل ناطق سازی) مینمایم یعنی در صورتیکه جذر مخرج $\sqrt[n]{a^m}$ طوریکه $a\neq 0$ و $m<n$ باشد برای ناطق ساختن ضورت و مخرج کسر را ضرب $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ مینمایم .

مثالها:- ناطق سازید .

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

3. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

4. $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\dfrac{5\sqrt{5\cdot 6}}{10}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

5. $\dfrac{7}{\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7}}}}=\dfrac{7}{\sqrt[8]{7^7}}=\dfrac{7\cdot\sqrt[8]{7}}{\sqrt[8]{7^7}\cdot\sqrt[8]{7}}=\dfrac{7\sqrt[8]{7}}{7}=\sqrt[8]{7}$

حالت دوم:- اگر مخرج دارای جذور مرکب باشد برای ناطق ساختن آن صورت و مخرج کسر را با مزدوج مخرج ضرب مینمایم .

به یاد داشته باشید مزدوج $a+\sqrt{b}$ عبارت از $a-\sqrt{b}$

مثالها :- ناطق سازید .

$$1.\quad \frac{2}{3+\sqrt{7}}=\frac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot\frac{\left(3-\sqrt{7}\right)}{3-\sqrt{7}}=\frac{2\cdot\left(3-\sqrt{7}\right)}{25-23}\Rightarrow\frac{2\cdot\left(3-\sqrt{7}\right)}{2}=\left(3-\sqrt{7}\right)$$

$$2.\quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

تقسیم جذور مرکب: برای تقسیم نمودن جذور مرکب اولا" مخرج را ناطق ساخته بعد تقسیم مینمایم.

مثال:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3}=\frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-1}=-2+\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

نوت: برای ساده ساختن جذرهای مانند $\sqrt{a\pm\sqrt{k}}$ از رابط $\sqrt{a\pm\sqrt{k}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$ استفاده میشود

طوریکه $\sqrt{k}=b$ و $c^2=a^2-b^2$ باشد .

مثالها:

1. $$\sqrt{\underbrace{4}_{a}+\underbrace{2\sqrt{3}}_{b}}$$

$$=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}+\sqrt{\frac{4-2}{2}}\Rightarrow\sqrt{3}+1$$

$$c^2=a^2-b^2=c^2=4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2$$
$$c^2=16-12\Rightarrow 4,$$
$$c=2$$

خلاصه :-

1.	$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$		$\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$
2.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$		$\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35}$
3.	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Rightarrow b \neq 0$		$\frac{\sqrt[4]{27}}{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[4]{\frac{27}{9}} = \sqrt[4]{3}$
4.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$		$\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$
5.	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$		$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$
6.	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	n عدد جفت	$\sqrt[2]{(-2)^2} = \lvert -2 \rvert = 2$
7.	$\sqrt[n]{a^n} = a$	n عدد تاق	$\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$