به نام پروردگار مهربان

تکنیک های مثلثات سریع

مهندس مصطفی باقری

مهروماه

سرشناسه:باقری، مصطفی، ۱۳۵۴ -عنوان و نام پدیدآور:تکنیک‌های مثلثات سریع / مصطفی باقری.
مشخصات نشر: تهران: مهر و ماه نو، / مشخصات ظاهری: ۱۰ ×۱۴/۵ سم. / فروست:...مجموعه کتاب‌های ریاضیات
سریع. / شابک: ۰-۹۴-۰-۳۱۷-۶۰۰-۹۷۸ / مثلثات -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه)رده بندی کنگره:۱۳۹۴ ۸ت۲ب/
QA۵۳۱/ رده بندی دیویی:۵۱۶/۲۴۰۷۶/ شماره کتابشناسی ملی: ۳۸۲۵۴۵۴

تکنیک‌های مثلثات سریع

انتشارات مهر و ماه نو

مؤلف: مهندس مصطفی باقری
ویراستار علمی: مینا نظری
تصویرگر: زهره بیگدلو

چاپ چهارم : ۱۳۹۶
تیراژ: ۲۵۰۰ نسخه
۹۷۸-۶۰۰-۳۱۷-۰۹۴-۰
قیمت: ۷۵۰۰ تومان

صفحه‌آرایی: رضا باغبانی
طراحی و آماده‌سازی برای چاپ:
واحد هنری و تولید انتشارات مهروماه نو

تهران، میدان انقلاب، خیابان ۱۲ فروردین، کوچه‌ی مینا، پلاک ۳۷
دفتر مرکزی............ ۶۶۴۰۸۴۰۰
واحد فروش............ ۶۶۴۰۸۴۰۳
روابط عمومی............ ۶۶۹۶۸۵۸۹
فروش اینترنتی و تلفنی. ۶۶۴۷۹۳۱۱
پیامک ۳۰۰۰۷۲۱۲۰
www.mehromah.ir

مهروماه

Scanned by CamScanner

رازی که بر غیر نگفتیم و نگوییم

با دوست بگوییم که او محرم راز است

مقدمه

درباره‌ی ریاضیات سریع MBM

MBM مخفف (Mostafa Bagheri's Math methods) می‌باشد و یادگار سنت حسنه‌ای است که تجربیات دو دهه آموزش، تحقیق و تدریس ریاضیات از مقطع ابتدایی تا کارشناسی ارشد این حقیر در معتبرترین مراکز آموزشی کشور را دربرمی‌گیرد. لذا در شکل‌گیری آن، تمامی دانش‌آموزان و دانشجویان محترمی که در طی سال‌های گذشته در خدمتشان بوده‌ام، نقش به‌سزایی داشته‌اند و جا دارد آرزوی قلبی خود را برای موفقیت و شادکامی آن‌ها تقدیم حضورشان نمایم.

ریاضیات سریع MBM شامل سه بخش اصلی با عناوین زیر می‌باشد:

۱ هنر محاسبه ۲ هنر حل مسأله ۳ هنر درست اندیشیدن

و هرکدام از بخش‌ها شامل ۱۰ تا ۲۴ شاخه بوده که می‌تواند در رشد، خلاقیت و پرورش ذهن دانش‌پژوهان از ۹ تا ۹۹ سال، نقش بسیار مفید، مؤثر و چشمگیری ایفا نماید.

ریاضیات سریع MBM چگونه به وجود آمد؟

همان‌گونه که مستحضرید، دانش‌آموزان و دانشجویان در طی دوران مختلف تحصیلی با آزمون‌های مختلفی روبه‌رو می‌شوند. بعضی از این آزمون‌ها از درجه اهمیّت بسیار بالایی برخوردارند؛ به نحوی که می‌توانند سرنوشت افراد را به طور کلی دگرگون نمایند. از جمله‌ی آن‌ها می‌توان آزمون‌های تیزهوشان، المپیاد، کنکور سراسری و آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری را نام برد که موفقیت در آن‌ها می‌تواند بستر مناسبی را برای ادامه‌ی مسیر تحصیلی تا قله‌های موفقیت فراهم نماید.

موفقیت در آزمون‌های علمی بر ۲ پایه‌ی اساسی استوار است:

۱ داشتن دانش کافی و توانایی حل مسأله

۲ سرعت عمل

فکر به وجودآمدن ریاضیات سریع MBM در ذهن من، برای پاسخ‌گویی به این دو نیاز اساسی شکل گرفت:

- بخش‌های هنر حل مسأله و هنر درست اندیشیدن، برای بالابردن توانایی حل مسأله در دانش‌آموزان و دانشجویان.
- بخش هنر محاسبه، برای بالابردن سرعت عمل و دقت در محاسبات.

هنر محاسبه‌ی MBM چگونه شکل گرفت؟

پشتوانه‌های من جهت تدوین یک برنامه‌ی آموزشی ایده‌آل و منحصربه‌فرد، با هدف بالابردن سرعت و دقت محاسبات دانش‌آموزان و دانشجویان، قریب به دو دهه مطالعه و تفکر و بیش از هزاران ساعت آموزش به بیش از چندین هزار دانش‌آموز و دانشجو (از دانش‌آموزان بسیار ضعیف تا دانشجویان نخبه و تیزهوش) بوده است. در این زمینه سعی کردم تمامی منابع موجود و نوشته‌های اساتید این فن را به دقت مطالعه و جمع‌آوری نموده و آن‌ها را در کلاس‌های درس با شاگردانم مطرح نمایم. در بین نوشته‌ها و آثار مختلف، بیشتر از کتاب‌های آقایان ادوارد جولیوس، جری لوکاس و بیل هندلی بهره برده‌ام. هم‌چنین چند مطلب جالب از کارهای آقایان تراختنبرگ و ودا بسیار مورد توجه من قرار گرفت. بقیه‌ی مطالب نیز جملگی از اکتشافات خودم بوده که به مجموعه اضافه گردیده است.

هنر محاسبه‌ی MBM شامل چه بخش‌هایی است؟

هنر محاسبه‌ی MBM شامل ۱۰ بخش می‌باشد:

۱ ضرب سریع

۲ تقسیم سریع

۳ جمع و تفریق سریع

۴ جذر سریع

۵ ضرب سریع با کلاس بالاتر

۶ مثلثات سریع

۷ لگاریتم سریع

۸ تخمین سریع

۹ کوچک‌تر، بزرگ‌تر یا مساوی

۱۰ سوپرمغزهای MBM

فواید یادگیری ریاضیات سریع MBM

ریاضیات سریع MBM شامل تکنیک‌های ساده و مفیدی است که با استفاده از آن‌ها قادر خواهید بود استعداد ریاضی خود را به طور چشمگیر و باورنکردنی افزایش دهید؛ حتی اگر در درس ریاضی از همه‌ی درس‌ها ضعیف‌تر باشید.
مطالب ریاضیات سریع MBM به‌گونه‌ای است که مستقیماً به برنامه‌ی درسی هیچ سالی مربوط نمی‌شود و کلیه‌ی افراد می‌توانند به راحتی آن‌ها را یادگرفته و به خوبی از آن‌ها استفاده کنند.
یادگیری این تکنیک‌ها به شما کمک خواهد کرد که سرعت محاسبات خود را به طور چشمگیری بالا ببرید و اشتباهات محاسباتی خود را به حداقل برسانید.
استفاده از تکنیک‌های ریاضیات سریع MBM در کلاس درس و امتحانات به شما کمک می‌کند که از دیگر رقبای خود، بسیار سریع‌تر عمل کنید و به راحتی آنان را پشت سر بگذارید. هم‌چنین استفاده از آن‌ها در زندگی روزمره به عنوان بهترین ورزش‌های فکری و نرمش‌های ذهنی، توانایی پردازش ذهن شما را بالا می‌برد.

این مجموعه کتاب‌ها برای چه کسانی نوشته شده است و بهترین راه استفاده از آن چیست؟

مخاطبین من در این مجموعه کتاب‌ها، همه‌ی افراد علاقمند از ۹ تا ۹۹ سال می‌باشند. لذا در نگارش آن سعی کرده‌ام مطالب را به ساده‌ترین شکل ممکن بیان کنم. هم‌چنین از تجربیات خود در زمینه‌ی آموزش این مطالب، بسیار بهره برده‌ام و سعی کرده‌ام سؤالاتی که در این زمینه در ذهن خوانندگان مختلف شکل می‌گیرد را با مثال‌های متنوع، پاسخ دهم.
تمامی روش‌های ارائه شده در این مجموعه کتاب‌ها به عنوان یک پیشنهاد به شما عرضه شده‌اند. لذا تکنیک‌هایی که به نظر شما شاید سخت یا دشوار باشند را در نگاه اول نادیده بگیرید و ابتدا تکنیک‌هایی که برایتان ساده‌تر هستند را یاد بگیرید. به مرور که ذهنتان با این روش‌ها آشنا شود، تکنیک‌هایی که در ابتدا به نظرتان سخت و غیرقابل استفاده می‌آمد، کم‌کم برایتان خوشایند خواهند شد.

بعد از یادگیری تکنیک‌ها، حتماً مسائل و تمرینات مربوطه را حل کنید تا بر تکنیک‌ها مسلط شوید.

پیشنهاد اکید بنده این است که **ریاضیات سریع** را با ضرب و تقسیم سریع شروع کنید و سپس با جمع و تفریق، جذر، ضرب‌سریع با کلاس بالاتر، مثلثات و لگاریتم سریع ادامه دهید و کتاب‌های تخمین سریع، کوچک‌تر، بزرگ‌تر یا مساوی و سوپرمغزهای MBM را در مرحله‌ی آخر یادگیری قرار دهید. به عقیده‌ی من، یک خواننده‌ی متوسط بدون احساس فشار یا **بدون انجام کار طاقت‌فرسا، می‌تواند توانایی‌های خود را در زمینه‌ی محاسبات به میزان چشمگیری افزایش دهد.**

انتظار من این است که خوانندگان جوان پس از مطالعه‌ی این سری کتاب‌ها، لذتی نو در ریاضیات بیابند و به اهمیت ریاضی در زندگی روزمره پی ببرند. از من کاری ساخته نیست مگر آنکه به شما کمک کنم تا در این فن، استاد شوید.

سخنی با مدیران، معلمان و اساتید دانشگاه

تجربه‌ی سال‌ها تدریس و مشاوره، مرا قاطعانه به این باور رسانده است؛ افرادی که به دنبال ورزش می‌روند و آن‌ها که به ریاضیات روی می‌آورند، از یک نوع انگیزه برخوردارند. این انگیزه از لذتی سرچشمه می‌گیرد که در نتیجه‌ی توانا شدن به انجام کاری برجسته که پیش از آن نامحتمل و ناممکن شمرده می‌شد، به فرد دست می‌دهد. لذتی که در هنگام شکستن رکورد شخصی، نصیب شناگر یا دونده‌ای می‌شود اساساً از همان نوعی است که دانش‌آموزان یا دانشجویان پس از موفقیت در حل مسأله‌ای دشوار، حس می‌کنند. هرگاه دانش‌آموز یا دانشجویی یک‌بار چنین لذتی را حس کند، سخت‌تر خواهد کوشید تا دوباره طعم خوش آن را بچشد. کلاس‌ها و کارگاه‌های آموزشی MBM هم‌اکنون در معتبرترین مراکز آموزشی و در مدارس نمونه و آموزشگاه‌های برتر کشور به عنوان یک درس فوق برنامه مورد استفاده قرار می‌گیرد. مجموعه کتاب‌های

آموزشـــی MBM که در پیش روی شـــما است، به گونه‌ای نوشته شده‌اند کـــه به راحتی قابل یادگیری می‌باشـــند. چنانچه علاقمند به تدریس این نکات در حاشیه‌ی کلاس‌های درسی خود می‌باشید می‌توانید با گذاشتن پیغام در آدرس پست الکترونیکی hamrah.m@gmail.com با من در ارتباط باشید. سعی خواهم کرد تجربیات خود را جهت تشکیل و چگونگی برگزاری کلاس‌ها برای رده‌های ســـنی ۹ تا ۹۹ سال، در اختیار شما قرار دهم. هم‌چنین تمرینات بسیار زیادی به صورت جزوه، جهت کار در کلاس و کار در منزل، طراحی کرده‌ام که در صورت نیاز، به صورت رایگان جهت استفاده در کلاس‌های درس، در اختیارتان قرار خواهم داد.

کافی است چندتا از این تکنیک‌ها را به شاگردان خود آموزش دهید تا به نتایج شگفت‌آور آن‌ها در جذب دانش‌آموزان و دانشجویان به ریاضیات پی ببرید و چنانچه چند محاسبه‌ی دشوار را به طور ذهنی در کلاس انجام دهید، خواهید دید که چگونه مورد توجه قرار می‌گیرید. هم‌چنین خواهشمندم نظرات ارزشمند خود را به نشـــانی الکترونیکی Info@MehroMah.ir ارسال و یا از طریق SMS به سامانه‌ی ۳۰۰۰۷۲۱۲۰ اعلام فرمایید.

سر خدمت تو دارم بخرم به لطف و مفروش
که چو بنده کمتر افتد به مبارکی غلامی

تقدیر و تشکر

جای مسرت خاطر است که یک‌بار دیگر مراتب حق‌شناسی خود را از استقبال گرمی که هم از جانب مدیران و معلمان مدارس و هم از جانب اساتید دانشگاه‌ها و گروه‌های آموزشی از این مجموعه به عمل آمده، ابراز دارم.

از دوستان ارجمندم؛ جناب آقای **دکتر علی عبدالعالی** به واسطه‌ی نظرات سازنده‌شان و آقایان **مهندس محمد ابوطالب** مدیر ارجمند موسسه‌ی توسعه‌ی آموزش‌های نوین، **مهندس علی رحیمی** مدیر مؤسسه‌ی علمی خبرگان، **دکتر علی هنرمند** مدیر مرکز رویش استعدادهای جوان (قیاس) و همکار عزیزم آقای **علی لغوی** در مرکز مطالعات و پژوهش‌خانه‌ی هوش پارسیان به واسطه‌ی همکاری‌های صمیمانه در سالیان اخیر، بسیار سپاسگزارم.

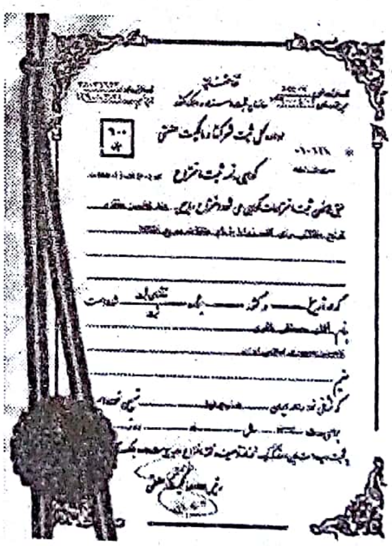
هم‌چنین از جناب آقای **احمد اختیاری** مدیر محترم انتشارات مهروماه به واسطه‌ی حُسن نظر و حمایت‌های بی‌دریغشان کمال تشکر را دارم. زحمت تایپ بر عهده‌ی آقای مجتبی حسنی و زحمت صفحه‌آرایی زیبای کتاب بر عهده‌ی آقای رضا باغبانی بوده است. هم‌چنین مدیر هنری این مجموعه کتاب‌ها آقای محسن فرهادی و سرکار خانم سمیه جباری مدیر تولید انتشارات و سرکار خانم فریده محمدی مدیر مالی انتشارات مهروماه با زحمات خود برای شکل‌گیری این سری کتاب‌ها، بنده را بسیار مورد لطف قرار داده‌اند. ویراستاری علمی این مجموعه بر عهده‌ی سرکار خانم مینا نظری بوده است که زحمات ایشان بی اغراق کم‌تر از زحمت تألیف کتاب‌ها نبوده است. بهترین آرزوها را برای تک‌تک این عزیزان از درگاه حق‌تعالی خواستارم و به تک‌تک‌شان از صمیم قلب، خسته نباشید می‌گویم.

شده‌ام خراب و بدنام و هنوز امیدوارم
که به همت عزیزان برسم به نیک‌نامی

مقدمه‌ی خاص مثلثات سریع

تخمین توابع مثلثاتی زوایای مختلف می‌تواند بسیار درخور توجه باشد.
با کسب این مهارت و شناخت کافی از توابع مثلثاتی می‌توان انواع کاملاً جدیدی از مسائل را حل کرد. توابع مثلثاتی کاربردهای زیادی دارند و طیف بسیار گسترده‌ای از مسائل در شاخه‌های مختلف علوم از جمله ریاضی، فیزیک، استاتیک، دینامیک، ارتعاشات، الکترومغناطیس، امواج مکانیکی، کوانتوم، اخترشناسی، مهندسی برق، مهندسی عمران، مهندسی مکانیک، علوم طبیعی، جغرافی و نقشه‌برداری و ... را شامل می‌شوند.
توابع مثلثاتی به افراد عامی نیز همچون متخصصان علوم، این امکان را می‌دهد تا با چشم تیزبین‌تری جهان را کاوش نمایند.

متد تخمین مقادیر توابع مثلثاتی برای کلیه زوایا



با نام: مثلثات سریع MBM

آرزوی به‌ظاهر دست‌نیافتنی ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان کلیه‌ی اعصار تا به امروز درباره‌ی «روش تخمین مقادیر توابع مثلثاتی برای کلیه زوایا»، توسط اینجانب **مصطفی باقری** برای اوّلین بار در دنیا ارائه و اختراع شده است و در کشور ایران به شماره‌ی **۵۵۴۰۷** به ثبت رسیده است.

مثلثات سریع MBM

این روش به خواننده کمک می‌کند با انجام کارهای درخشانی که در این زمینه انجام می‌دهد (کارهایی که در نظر اوّل از عهده‌ی انجام همگان خارج است.) احساس مسرت نموده و انگیزه و اعتماد به نفس بیشتری در جهت استفاده و یادگیری مثلثات داشته باشد. همچنین با استفاده از آن‌ها می‌توان **در کنکورهای سراسری، کاردانی به کارشناسی و کارشناسی ارشد و دکتری** به انواع مختلفی از سؤالات دشوار، به سرعت و به راحتی پاسخ داد. این روش را در نهایت سادگی و به طور باورنکردنی قابل یادگیری طراحی و تدوین نموده‌ام به گونه‌ای که همه‌ی علاقمندان (حتی آنان که با مثلثات آشنایی ندارند) بتوانند در مدت کوتاهی آن را آموزش دیده و از آن استفاده کنند. اکنون که این کار را به پایان رسانده‌ام، حداکثر مزدی که از این کار انتظار دارم آن است که اندکی از لذتی که در نتیجه‌ی به ثمر رساندن آن نصیب من شده و ذره‌ای از شور و هیجانی که هنگام اختراع و اکتشاف آن داشته‌ام، نصیب خوانندگان محترم شود.

مقدمه‌ی چاپ دوم

خدا را شاکرم که چاپ اول کتاب مورد استقبال فراوان علاقمندان قرار گرفت و فقط چند روز پس از چاپ، در بازار نایاب شد!

در چاپ دوم، تصمیم گرفتم مطالبی را در جهت هر چه کامل‌تر کردن مجموعه به کتاب اضافه کنم. لذا در بخش اول کتاب فصل‌های پنجم و ششم را اضافه کردم. در فصل پنجم تخمین مقادیر مختلف آرک‌ها و توابع معکوس مثلثاتی را اضافه کردم و در فصل ششم نکاتی را در مورد حل معادلات مثلثاتی آورده‌ام که ان‌شاءالله مورد استفاده‌ی بیشتر علاقمندان قرار گیرد. ضمناً در بخش دوم کتاب یک بخش به عنوان مثلثات سریع در کنکور ۹۴ را اضافه کردم که شامل حل تست‌های کنکور ریاضی و تجربی، داخل و خارج از کشور سال ۹۴ بوده است. امیدوارم مورد عنایت بیشتر دانش‌پژوهان جوان و اندیشمندان قرار گیرد.

با تقدیم احترام
مصطفی باقری
تابستان ۹۴

فهرست

بخش اوّل: یادگیری مثلثات سریع

(تخمین سریع مقادیر توابع مثلثاتی برای کلیه زوایا)

فصل اوّل: تخمین مقادیر مختلف تابع محترم سینوس

فصل دوم: تخمین مقادیر مختلف تابع محترم کسینوس

فصل سوم: تخمین مقادیر مختلف تابع محترم تانژانت

فصل چهارم: تخمین مقادیر مختلف تابع محترم کتانژانت

فصل پنجم: تخمین مقادیر مختلف توابع معکوس مثلثاتی

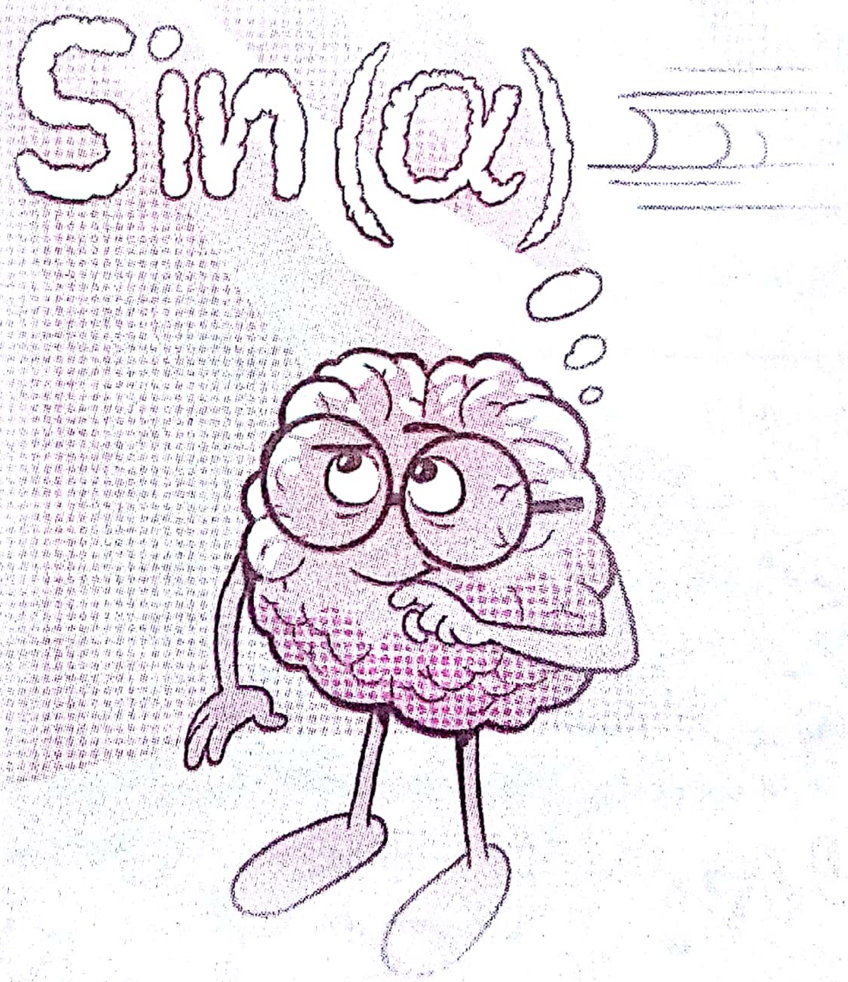
فصل ششم: حل معادلات مثلثاتی

بخش دوم: کاربردهای مثلثات سریع

بخش اول

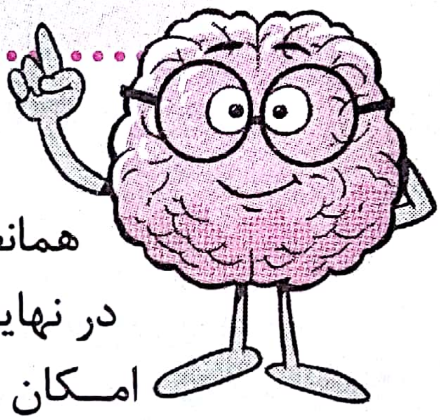
یادگیری مثلثات سریع

(تخمین سریع مقادیر توابع مثلثاتی برای کلیه زوایا)



فصل اول

تخمین مقادیر مختلف تابع محترم سینوس وقتی زاویه بین صفر تا °۹۰ باشد.



همانطـــور که در مقدمه گفتـــم این روش رو در نهایت سادگی طراحی کردم که به شما این امـــکان رو بده تا در کمال ســـادگی و در نهایت سرعت، بتونید با دقت بسیار خوب و قابل قبولی مقادیر مختلف تابع sin رو برای هر زاویه‌ی دلخواهی پیدا کنید.
در این فصل، اوّل یاد می‌گیریم تا به سرعت مقادیر سینوس رو برای زوایای بین ۰ تا °۹۰ حساب کنیم و سپس در ادامه با استفاده از روابط پایه‌ی مثلثاتی به راحتی خواهیم توانســـت سینوس تمامی زوایا را عین بنز حساب کنیم. برای اینکه به این توانایی دست پیدا کنید، فقط کافیه یه جدولی رو (که من بهتون میگم) حفظ کنید.
این جدول دوتا ســـطر داره؛ سطر اوّل مقادیر زوایای اصْلی بین ۰ تا °۹۰ رو تـــو خودش جای داده و ســـطر دوم، اعدادی رو در خودش جای داده که اسمشون رو گذاشتم «**اعداد طلایی سینوس**». ابداع خودمه و دوست داشتم این اسم رو براش انتخاب کنم! بعد از این نامگذاری، شنیدم که گروهی از اعراب، چند نفر تو آفریقا و یه تعدادی تو اروپا و عده‌ای هم در آمریکا، چین، ژاپن و روسیه به این اسم اعتراض داشتن و تظاهرات راه

انداختن، منم بیانیه دادم که ابداع خودمه، دوست داشتم این اسم رو بزارم، خیلی هم اعتراض کنین اصلاً اسمش رو می‌ذارم «عدد گچپنژینقاگورش».

حدس می‌زنین چی‌شد! همشون جا زدن رفتن خونه‌هاشون!!! آخه هیچ ملّیتی نبـود که بتونه همه‌ی حروف این کلمـه رو تلفظ کنه جز ایرانی‌ها! برای همین همشـون تسلیم شـدن و رفتن خونه‌هاشـون (مثلاً اعراب حاضر بودن هزار تا روپایی بزنن و بعدش هشتصد تا دراز و نشست برن، ولی یه بار این لغت رو تلفظ نکنن! چون نه گ دارن نه پ، نه ژ و نه حتی چ!)

ببین چه خوبه آدم برای خودش ابداع و اختراع داشته باشه، حداقل همه‌ی دنیا مجبورن به آدم این اجازه رو بدن که اسم ابداع و اختراعش رو، خودش انتخاب کنه!

بعله! داشـتم می‌گفتم، قیافه‌ی این جدول رو می‌تونید در پایین ببینید. اسـم خـود جدول رو هم گذاشـته‌ام **جدول طلایـی ملینا** (چراشم گفتم به خودم مربوطه!)

مقدار زاویه برحسب درجه

α	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°	۵۰°	۶۰°	۷۰°	۸۰°	۹۰°
$M_{sin\alpha}$	۰	۷	۱۴	۲۰	۲۴	۲۶	۲۶	۲۴	۱۸	۱۰

عدد طلایی سینوس

همانطـور که می‌بینیـد در پایین هـر زاویه، یک عـدد طلایی سینوس نوشته شده است. چیزی که ازتون می‌خوام اینه که این ده‌تا عدد طلایی رو خوب و به ترتیب حفظ کنید.

۱۰,۱۸,۲۴,۲۶,۲۶,۲۴,۲۰,۱۴,۷,۰

۱۰,۱۸,۲۴,۲۶,۲۶,۲۴,۲۰,۱۴,۷,۰

۱۰,۱۸,۲۴,۲۶,۲۶,۲۴,۲۰,۱۴,۷,۰

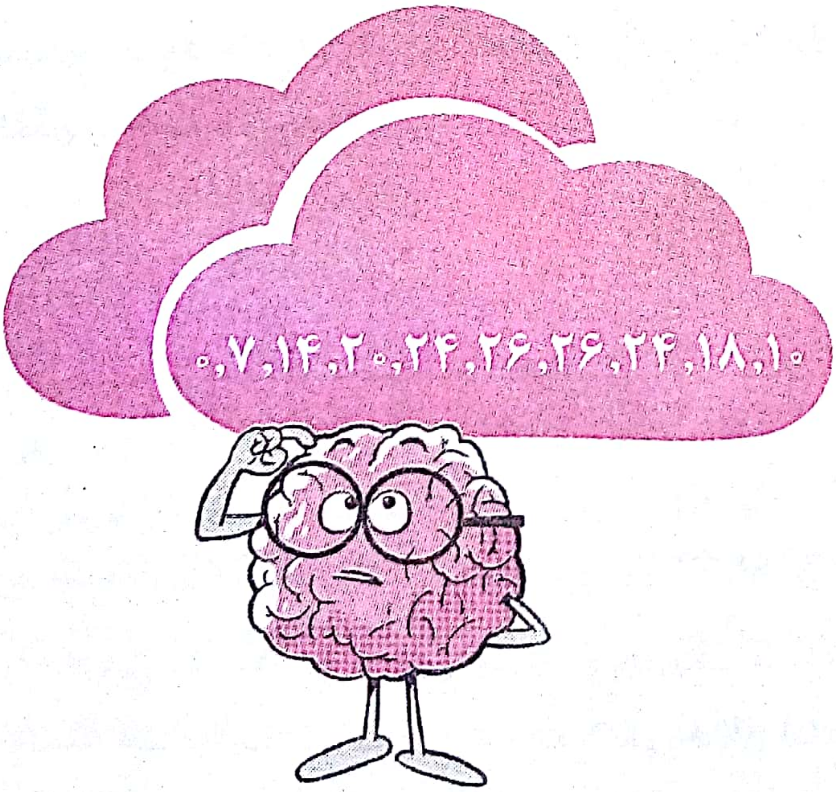
⋮

۱۰,۱۸,۲۴,۲۶,۲۶,۲۴,۲۰,۱۴,۷,۰

کتابو ببندید و ۸۰۰ بار بلند و با چشم بسته تکرار کنید.

۱۰,۱۸,۲۴,۲۶,۲۶,۲۴,۲۰,۱۴,۷,۰

حالا چشماتون رو باز کنید. اگه این ده‌تا عدد رو به ترتیب حفظ کردید به شما این مژده رو میدم که تا لحظاتی دیگه صاحب یه قدرت خیلی‌خیلی خارق‌العاده‌ای خواهید شد!



۱ تکنیک تخمین مقادیر مختلف تابع محترم سینوس وقتی زاویه بین صفر تا °۹۰ باشد.

قدم اوّل: مقدار زاویه برحسب درجه را با عدد طلایی سینوس مربوط به آن زاویه جمع کنید. $(\alpha + M_{\sin\alpha})$

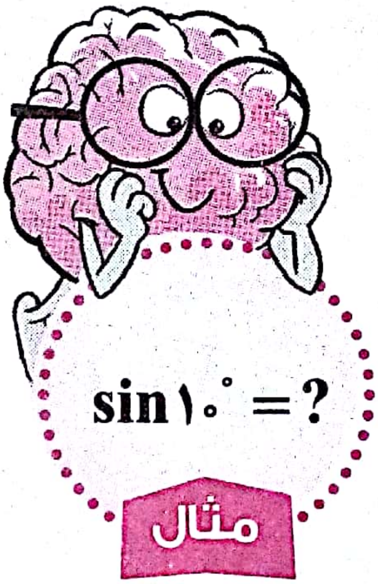
قدم دوم: دو رقم به اعشار بروید.

نکته: برای یافتن عدد طلایی سینوس برای بقیه‌ی زوایایی که در جدول نیامده، از درونیابی خطی و یا تقریب چشمی استفاده کنید. (در ادامه به شما این موضوع رو یاد میدم!) با همدیگه شروع می‌کنیم و مرحله به مرحله جلو می‌ریم. مطمئن باشید به همه‌ی سؤالاتی که تو ذهن شماست پاسخ خواهم داد.

تخمین سینوس زوایای اصلی بین ۰ تا ۹۰ درجه:

(۰، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰)

در اینجا ما راحت‌ترین مسیر رو طی می‌کنیم. برای اینکه متوجه منظورم بشید، براتون چندتا مثال حل می‌کنم.



خـــب! در اینجا مـــا می‌خوایم مقدار $\sin 10^\circ$ رو تخمین بزنیم. پس طبق دستورالعمل MBM رفتار می‌کنیم.

قـدم اوّل: بایـــد مقـــدار زاویـــه برحســـب درجـــه رو با عـــدد طلایی ســـینوس مربوط بـــه آن زاویه جمع کنیـــم. در اینجا زاویه‌ی مورد نظر ما 10° اســـت و عدد طلایـــی مربوط به 10° هـــم همانطـــور کـــه در جدول دیدیم و حفظ کردیم، برابر ۷ اســـت. پس در قدم اوّل کافیه عدد ۱۰ رو با ۷ جمع کنیم.

$10+7=17$

قدم دوم: کافیه به جواب به دست اومده، دو رقم اعشار بزنیم.

$$17 \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم.}} 0/17$$

تمام شد. ما به جواب رسیدیم.

$$\Rightarrow \sin 10^\circ = 0/17$$

اگه ماشین‌حساب مهندســـی دم دستتون دارید، جواب رو بزنید و کیف کنید!

خُب در اینجا می‌خوایم سینوس ۵۰ درجه رو تخمین بزنیم، شروع می‌کنیم.

مثال

$\sin ۵۰^\circ = ?$

قدم اوّل: مقدار زاویه برحسب درجه رو باید با عدد طلایی مربوطش جمع کنیم. در اینجا زاویه‌ی مورد نظر ما ۵۰° است و همانطور که در جدول دیدیم و حفظ کردیم، عدد طلایی مربوط به ۵۰° برابر ۲۶ است.

۵۰+۲۶=۷۶

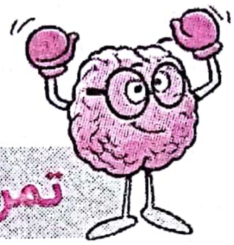
قدم دوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

$۷۶ \xrightarrow{\text{دو رقم به اعشار می‌رویم.}} ۰/۷۶$

تمام شد. ما به جواب رسیدیم.

$\Rightarrow \sin ۵۰^\circ = ۰/۷۶$

شروع کنید تمرینات مربوطه رو حل کنید. فقط اگه ناراحتی قلبی دارید، حتماً با پزشک خودتون مشورت کنید که از خوشحالی، خدای نکرده کار دستمون ندید! موفق باشید. (ضمناً برای این اسم این زوایا رو اصلی گذاشتم چون هم خوش تیپن و هم مقادیر عدد طلایی اون‌ها در جدول اومده و ما اون‌ها رو حفظ هستیم.)



تمرینات دست‌گرمی

۱ $\sin 0^\circ =$

۲ $\sin 10^\circ =$

۳ $\sin 20^\circ =$

۴ $\sin 30^\circ =$

۵ $\sin 40^\circ =$

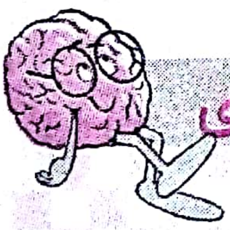
۶ $\sin 50^\circ =$

۷ $\sin 60^\circ =$

۸ $\sin 70^\circ =$

۹ $\sin 80^\circ =$

۱۰ $\sin 90^\circ =$



استراحت فکری

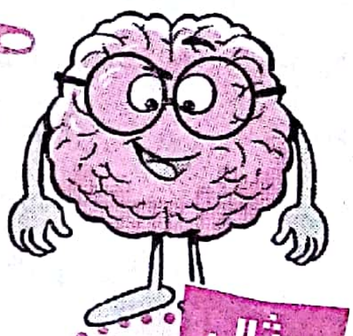
در ریاضیات آنچه مهم است، فکر کردن است!

ریاضیات الفبایی است که خداوند جهان را بر مبنای آن خلق کرد.

گالیله

۲ تکنیـــک تخمین مقادیر تابع ســینوس برای زوایای فرعی (۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵، ... و ۸۵ درجه.)

حــالا میریم ســراغ زاویه‌هــای ۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵، ۴۵، ۵۵، ۶۵، ۷۵ و ۸۵ درجه. چرا رفتم سراغ این زاویه‌ها، چون دقیقاً وسط زاویه‌هایی هستن که ما عدد طلایی اون‌هارو حفظ کردیم و به راحتی می‌تونیم عدد طلایی مربوط به هرکدوم از این زاویه‌ها رو هم محاسبه کنیم. این زاویه‌ها وســط زاویه‌های اصلی‌مــون قرار گرفتن و اعداد طلایی مربوط به اون‌ها هم درســت وسط اعداد طلایی زاویه‌های اصلی ما واقع می‌شن. بریم با هم چندتا مثال حل کنیم تا متوجه بشید.



مثال

$$\sin 25^\circ = ?$$

قــدم اوّل: ابتــدا عــدد طلایــی مربوط به زاویه‌ی 25° رو به دســت میاریم. زاویه‌ی 25° درست وسط زاویه‌های 20° و 30° واقع شده، پس عــدد طلایی مربوط به اون هم، وســط عــدد طلایی زاویه‌ی 20° (یعنــی ۱۴) و عدد طلایی زاویه 30° (یعنی ۲۰) واقع می‌شــه.

$$M_{\sin 25^\circ} = \frac{M_{\sin 20^\circ} + M_{\sin 30^\circ}}{2} = \frac{14+20}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

قدم دوم: مقدار زاویه برحســـب درجه رو با عدد طلایی‌اش جمع می‌کنیم. یعنی در اینجا عدد ۲۵ رو با عدد ۱۷ جمع می‌کنیم.

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = 25 + 17 = 42$$

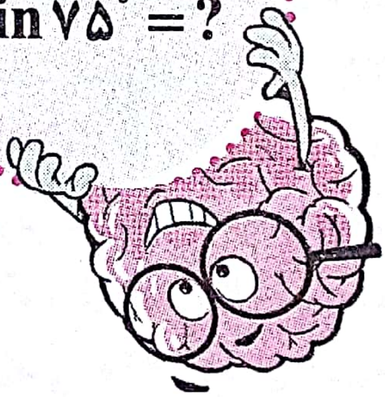
قدم سوم: کافیه به عدد به دست اومده، دو رقم ممیز بزنیم.

$$42 \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم.}} 0/42$$

تمام شد! ما به جواب رسیدیم. $\Rightarrow \sin 25^\circ = 0/42$

مثال

$$\sin 75^\circ = ?$$



قــدم اوّل: باید عدد طلایی مربوط به زاویه 75° رو حســـاب کنیم. زاویه 75° درست وسط زاویه‌های 70° و 80° واقع شده اســـت، پس عدد طلایی مربوط به اون هم وسط عدد طلایی زاویه 70° (یعنی ۲۴) و زاویه 80° (یعنی ۱۸) واقع می‌شه.

$$\Rightarrow M_{\sin 75^\circ} = \frac{M_{\sin 70^\circ} + M_{\sin 80^\circ}}{2} = \frac{24+18}{2} = 21$$

قدم دوم: مقدار زاویه را با عدد طلایی‌اش جمع می‌کنیم.

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = 75 + 21 = 96$$

Scanned by CamScanner

قدم سوم: به حاصل به دست آمده دو رقم اعشار می‌زنیم.

$$۹۶ \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم.}} ۰/۹۶$$

تمام شد! به همین سادگی. $\Rightarrow \sin ۷۵^\circ = ۰/۹۶$

جواب رو با ماشین‌حساب چک کنید تا حسابی روحتون شاد بشه!

برای اینکه راحت باشـــید، عدد طلایی مربوط به این زوایا رو هم در پایین براتون حساب کردم، این کار رو خودتون هم به راحتی می‌تونید انجام بدید.

$$M_{\sin ۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۰^\circ} + M_{\sin ۱۰^\circ}}{۲} = ۳/۵$$

$$M_{\sin ۱۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۱۰^\circ} + M_{\sin ۲۰^\circ}}{۲} = ۱۰/۵$$

$$M_{\sin ۲۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۲۰^\circ} + M_{\sin ۳۰^\circ}}{۲} = ۱۷$$

$$M_{\sin ۳۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۳۰^\circ} + M_{\sin ۴۰^\circ}}{۲} = ۲۲$$

$$M_{\sin ۴۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۴۰^\circ} + M_{\sin ۵۰^\circ}}{۲} = ۲۵$$

$$M_{\sin ۵۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۵۰^\circ} + M_{\sin ۶۰^\circ}}{۲} = ۲۶$$

$$M_{\sin ۶۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۶۰^\circ} + M_{\sin ۷۰^\circ}}{۲} = ۲۵$$

$$M_{\sin ۷۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۷۰^\circ} + M_{\sin ۸۰^\circ}}{۲} = ۲۱$$

$$M_{\sin ۸۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۸۰^\circ} + M_{\sin ۹۰^\circ}}{۲} = ۱۴$$

تمرینات دست‌گرمی

۱) $\sin ۵^\circ =$

۲) $\sin ۱۵^\circ =$

۳) $\sin ۲۵^\circ =$

۴) $\sin ۳۵^\circ =$

۵) $\sin ۴۵^\circ =$

۶) $\sin ۵۵^\circ =$

۷) $\sin ۶۵^\circ =$

۸) $\sin ۷۵^\circ =$

استراحت فکری

هیچ دانشی را نمی‌توان واقعی دانست
مگر اینکه به‌صورت ریاضی نوشته شود.

داوینچی

۳ تکنیک تخمین مقادیر مختلف تابع سینوس برای زوایای بین ۵۰ تا ۶۰ درجه: (زوایای خوش‌رفتار)

خب! رسیدیم به یه قسمت خیلی باحال دیگه! اگه دقت کرده باشید؛ عدد طلایی مربوط به زاویه‌ی 50° برابر ۲۶ بود و همچنین عدد طلایی مربوط به زاویه‌ی 60° هم تصادفاً برابر ۲۶ بود. فَلِذا عدد طلایی مربوط به همه‌ی زوایای بین ۵۰ تا ۶۰ درجه رو هم برابر ۲۶ در نظر می‌گیریم و به سرعت مقدار sin رو برای این زوایا به دست میاریم. برای همینم اسمشون رو گذاشتم زوایای خوش‌رفتار، چون تکلیف عدد طلایی‌شون مشخصه.

مثال

$$\sin 52^\circ = ?$$

قدم اوّل: عدد طلایی مربوط به زاویه‌ی 52° را باید به دست بیاریم که همونطور که گفتیم برابر ۲۶ است.

قدم دوم: مقدار زاویه برحسب درجه رو با عدد طلایی آن جمع می‌کنیم.

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = 52 + 26 = 78$$

قدم سوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

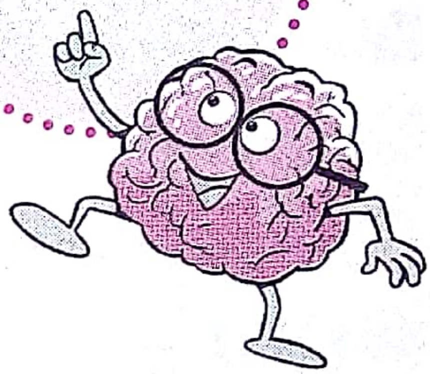
$$78 \longrightarrow 0/78$$

$$\Rightarrow \sin 52^\circ = 0/78$$

تمام شد!

مثال

$\sin ۵۷/۵^{\circ} = ?$



قدم اوّل: عدد طلایی مربوط به زاویه‌ی ۵۷/۵ درجه رو باید به دست بیاریم. که همونطور که گفتیم برابر ۲۶ است.

قدم دوم: مقدار زاویه رو با عدد طلایی مربوطه جمع می‌کنیم.

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = ۵۷/۵ + ۲۶ = ۸۳/۵$$

قدم سوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

$$۸۳/۵ \longrightarrow ۰/۸۳۵ \xrightarrow{\text{گرد می‌کنیم}} ۰/۸۴$$

تمام شد!

$$\Rightarrow \sin ۵۷/۵^{\circ} = ۰/۸۴$$

زحمت بکشید و تمرینات رو حل کنید.

تمرینات دست‌گرمی

۱ sin ۵۹° =

۲ sin ۵۱° =

۳ sin ۵۵° =

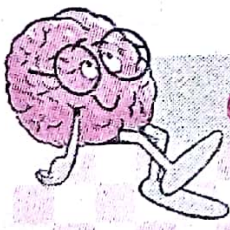
۴ sin ۵۷° =

۵ sin ۵۴° =

۶ sin ۵۲° =

۷ sin ۵۸° =

۸ sin ۵۳° =



استراحت فکری

برای گسترش اندیشه‌ی خود،
باید بیشتر از آنچه یاد می‌گیریم، فکر کنیم.
دکارت

۴ تکنیک تخمین مقدار تابع سینوس برای زوایای بین ۸۰ تا ۹۰درجه: (زوایای سـینوس درشت!)

می‌دونیم که تابع sin در محدوده‌ی ۰ تا °۹۰ یک تابع اکیداً صعودی است. یعنی هرچه زاویه بزرگ‌تر می‌شه، مقدار sin اون هم بزرگ‌تر می‌شـه. مقـدار $\sin 80^\circ$ رو الان می‌تونیم راحت حسـاب کنیم.

$$\sin 80^\circ = \frac{80+18}{100} = 0/98$$

مقدار $\sin 90^\circ$ رو هم که می‌دونیم برابر ۱ است. خوب از این چیزایی کـه الان گفتم می‌تونیم یه نتیجه‌گیری خیلی‌خوب بکنیم. مثلاً اگه بخواهیم $\sin 83^\circ$ رو همین‌جوری تخمین بزنیم، می‌دونیم که چون تابع sin اکیداً صعودیه، پس $\sin 83^\circ$ حتماً از $\sin 80^\circ$ بزرگ‌تره. ضمناً چون °۸۳ از °۹۰ کوچیک‌تره پس $\sin 83^\circ$ باید از $\sin 90^\circ$ کوچک‌تر باشه یعنی:

$$\sin 80^\circ < \sin 83^\circ < \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow 0/98 < \sin 83^\circ < 1$$

خُب! اگه بخوایم سـریع بگید $\sin 83^\circ$ تقریبـاً برابر چه مقداریه، چی جواب میدین؟!

بعله! باید عددی باشه از ۰/۹۸ بزرگ‌تر و از ۱ کوچک‌تر.

بعله درسته ۰/۹۹ $\Rightarrow \sin 83^\circ = 0/99$

خُب! اگــه بخوایم ســریع بگیــد $\sin ۸۳^\circ$ تقریبــاً برابر چه مقداریه، چی جواب میدین؟!

بعله! باید عددی باشه از ۰/۹۸ بزرگ‌تر و از ۱ کوچک‌تر.

بعله درسته ۰/۹۹ $\Rightarrow \sin ۸۳^\circ = ۰/۹۹$

خُــب! حالا یه ســؤال دیگه. می‌خوایــم مقدار $\sin ۸۸^\circ$ رو تخمین بزنیم. باز همین استدلال بالا رو داریم:

$$\sin ۸۰^\circ < \sin ۸۸^\circ < \sin ۹۰^\circ$$

جایگذاری می‌کنیم.

$$\sin ۸۰^\circ = ۰/۹۸, \sin ۹۰^\circ = ۱$$

$$\Rightarrow ۰/۹۸ < \sin ۸۸^\circ < ۱$$

بازم به این نتیجه رســیدیم که مقدار $\sin ۸۸^\circ$ باید از ۰/۹۸ بزرگ‌تر و از ۱ کوچیک‌تر باشــه و بهترین عددی که می‌تونیم برای اون در نظر بگیریم همون ۰/۹۹ است.

$$\Rightarrow \sin ۸۸^\circ = ۰/۹۹$$

الان ممکنه دادتون دربیاد که آقا $\sin ۸۳^\circ$ رو گفتین می‌شه ۰/۹۹، حــالا $\sin ۸۸^\circ$ رو هــم می‌گین ۰/۹۹، خــوب اینکه نمی‌شه که! منم می گم چرا عزیزِ دلِ برادر، می‌شه!

واقعیت اینه که ما داریم مقادیر رو تخمین می‌زنیم یعنی قرار نیست جواب دقیق به دست بیاریم. اصلاً ما که هیچی، ماشین‌حساب هم جواب تقریبی بهمون میده، اصلاً ماشین‌حساب هم هیچی، بزرگ‌ترین کامپیوترها هم تا قیامت نمی‌تونن مقدار دقیق توابع مثلثاتی رو به دست بیارن، می‌دونین چرا؟ چون که مقادیر توابع مثلثاتی به‌جز استثناءهای $\sin 30^\circ$ و $\cos 60^\circ$ و $\tan 45^\circ$ و $\cot 45^\circ$، بقیه در محدوده‌ی بین ۰ تا 90°، همگی مقادیر گنگ اختیار می‌کنن. این موضوع تحت عنوان یه قضیه در ریاضیات عالی به این شکل بیان می‌شه؛

قضیه

اگر θ زاویه‌ای باشد که اندازه‌ی آن برحسب درجه یک عدد گویا باشد، همچنین اگر $0 < \theta < 90^\circ$، آن‌گاه $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و $\tan\theta$ (به جز سه استثناء $(\tan 45^\circ = 1, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$ عددهای گنگ هستند.

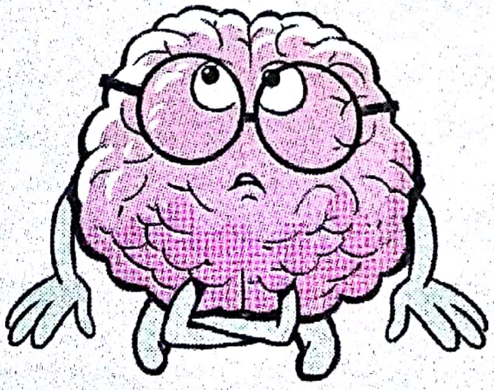
اثبات این قضیه یه مقدار پیچیده است و تا مقطع کارشناسی ارشد و دکتری هم به دردتون نمی‌خوره، مگر اینکه تو دانشگاه بخواهید ریاضی محض بخونین که اونجا بهتون یاد میدن. (اثباتش از حوصله‌ی این کتاب خارجه ولی شاید در انتهای کتاب بیارمش. هنوز تصمیم نگرفتم!)

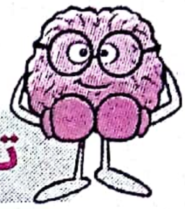
حـــالا به هرحال برگردیم ســر مطلـــب خودمـــون. بعله گفتم $\sin 83^\circ = 0/99$ و همچنیـــن $\sin 88^\circ = 0/99$ الان هـــم مجدداً تکرار می‌کنم که درست گفتم. واقعیت اینه که سینوس این زوایا بسیار به‌هم نزدیکه و تازه از رقم‌های سوم و چهارم به بعدِ بعد از اعشار، اختلاف این‌ها ظاهر می‌شه. اصلن می‌خوام یه جمله بگم که کلی باهاش حال کنید، گناهش هم گردن من!

اون جمله اینه: در محاسبات، مقدار sin را برای همه‌ی زوایای بین ۸۰ تا ۹۰ درجه، برابر ۰/۹۹ در نظر می‌گیریم.

ضمناً در اغلـــب موارد که به دقت خیلی بالایی نیاز نداریم (*اینْ اغلبْ موارد شـــامل کنْکور هم می‌شـــودها!*) مقدار sin را برای این زوایا برابر ۱ در نظر می‌گیریم تا محاسباتمان ساده‌تر شود. برای همین هم اسم این زوایا رو گذاشتم سینوس درشت.

بریـــد و تمرینات رو حـــل کنید و خوش باشـــید و از زندگی جدیدتون لذت ببرید!





تمرینات دست‌گرمی

۱ $\sin ۸۹^\circ =$

۲ $\sin ۸۱^\circ =$

۳ $\sin ۸۵^\circ =$

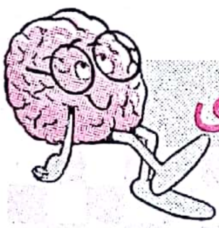
۴ $\sin ۸۷^\circ =$

۵ $\sin ۸۳^\circ =$

۶ $\sin ۸۸^\circ =$

۷ $\sin ۸۲^\circ =$

۸ $\sin ۸۴^\circ =$



استراحت فکری

انسان‌های باهوش مسائل را حل می‌کنند ولی
نوابغ آن‌ها را اثبات می‌کنند.

آلبرت انیشتین

۵ تکنیک تخمین مقادیر مختلف تابع سینوس برای زوایایی که بسیار به زوایای اصلی و فرعی نزدیک هستند. (حداکثر ۲/۵ درجه اختلاف دارند.)

برای تخمین زوایایی که بسیار به زوایای اصلی (یعنی ۰، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ ، ... و ۹۰) و یا زوایای فرعی (یعنی ۵، ۱۵، ۲۵ و ...) نزدیک هستند، به دو صورت می‌تونید عمل کنید؛ یا از درونیابی خطی استفاده کنید. (که در ادامه به شما یاد خواهم داد) و یا از تقریب چشمی که همین حالا می‌خواهم به شما بگویم، استفاده کنید.

روش تخمینی با تقریب چشمی:

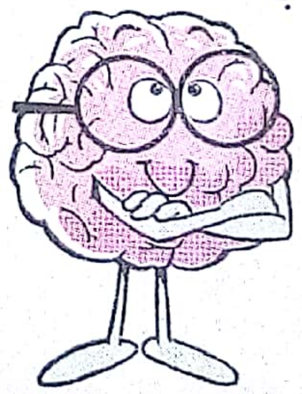
این روش از سرعت بسیاربسیار بالایی برخورداره و ضمناً دقت بسیار قابل قبولی هم داره و پیشنهاد می‌کنم برای حل تست‌های کنکور از همین روش استفاده کنید.

در این روش برای به دست آوردن عدد طلایی مربوط به هر زاویه، ابتدا نزدیک‌ترین زاویه‌ی اصلی و فرعی نزدیک به آن زاویه را در نظر می‌گیریم. زاویه‌ی مورد نظر ما به هرکدام که نزدیک‌تر بود، عدد طلایی مربوط به همان را برای زاویه‌مان در نظر می‌گیریم و محاسبه‌ی خود را انجام می‌دهیم. مثلاً وقتی می‌خواهیم عدد طلایی مربوط به زاویه‌ی ۳۲° را به

دست بیاوریم، از آنجایی که نزدیک‌ترین زاویه‌ی اصلی ما به 32° برابر 30° است و نزدیک‌ترین زاویه‌ی فرعی به زاویه‌ی 32° برابر 35° است و 32° به 30° نزدیک‌تر است، عدد طلایی مربوط به زاویه‌ی 30° (یعنی عدد ۲۰) را به عنوان عدد طلایی مربوط به 32° در نظر می‌گیریم و محاسبه را انجام می‌دهیم.

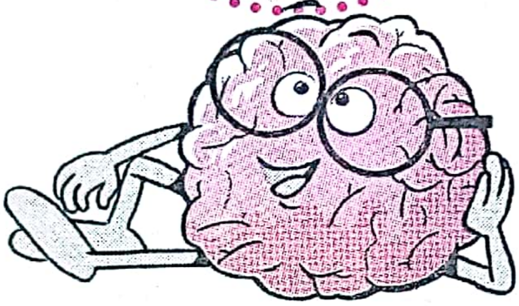
نکته: برای زوایایی که فاصله‌شان از نزدیک‌ترین زاویه‌ی اصلی و فرعی به یک اندازه است، میانگین عدد طلایی زوایای اصلی و فرعی نزدیک به آن زاویه را در نظر می‌گیریم.

به همین سادگی ما قادر خواهیم بود با سرعت بسیار زیاد و دقت بسیار قابل قبولی، مقادیر sin همه‌ی زوایای بین ۰ تا 90° را محاسبه کنیم.



مثال

$$\sin ۲۱^\circ = ?$$



قدم اوّل: باید عدد طلایی مربوط به زاویه‌ی ۲۱ درجه را محاسبه کنیم. نزدیک‌ترین زوایای اصلی و فرعی به ۲۱ درجه عبارتند از ۲۰° و ۲۵° که حتی یه جلبک هم می‌تونه رو هوا تشخیص بده که ۲۱° به ۲۰° نزدیک‌تره تا به ۲۵°.

پس با تقریب چشمی، عدد طلایی مربوط به ۲۰° یعنی عدد ۱۴ را به عنوان عدد طلایی زاویه‌ی ۲۱° در نظر می‌گیریم.

قدم دوم: مقدار زاویه را با عدد طلایی جمع می‌کنیم.

$$۲۱+۱۴=۳۵$$

قدم سوم: به جوابمان دو رقم اعشار می‌زنیم.

$$۳۵ \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم}} ۰/۳۵$$

تمام شد! ما به جواب رسیدیم.

جواب با تقریب چشمی $\sin ۲۱^\circ = ۰/۳۵$

جواب با ماشین‌حساب مهندسی $\sin ۲۱^\circ = ۰/۳۵۸$

$\Rightarrow$

مثال

$\sin ۹^{\circ} = ?$

قدم اوّل: از بین زوایای اصلی و فرعی، نزدیک‌ترین زاویه به زاویه‌ی ۹°، زاویه‌ی ۱۰° است. که عدد طلایی مربوط به اون هم برابر ۷ است. پس ما همون عدد طلایی رو برای زاویه‌ی ۹° در نظر می‌گیریم.

قدم دوم: زاویه رو با عدد طلایی جمع می‌کنیم. ۹+۷=۱۶

قدم سوم: دو رقم به آن ممیز می‌زنیم.

$$۱۶ \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم.}} ۰/۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \sin ۹^{\circ} = ۰/۱۶ \\ \sin ۹^{\circ} = ۰/۱۵۶ \end{array}$$

جواب با تقریب چشمی

جواب با ماشین‌حساب مهندسی

مثال

$\sin ۴۳^{\circ} = ?$

قدم اوّل: از بین زوایای اصلی و فرعی، نزدیک‌ترین زاویه به زاویه‌ی مورد نظر ما زاویه‌ی ۴۵° است، که عدد طلایی آن برابر ۲۵ است. پس ما همین عدد طلایی را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

قدم دوم: مقدار زاویه رو با عدد طلایی جمع می‌کنیم.

۴۳+۲۵=۶۸

قدم سوم: دو رقم به اون اعشار می‌زنیم. $68 \longrightarrow 0/68$

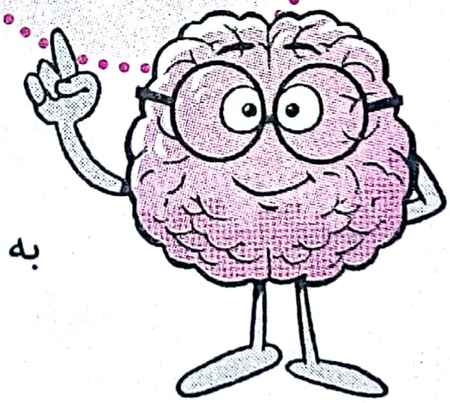
$$\Rightarrow \begin{matrix} \sin 43^\circ = 0/68 \\ \sin 43^\circ = 0/681 \end{matrix}$$

جواب با تقریب چشمی

جواب با ماشین حساب مهندسی

مثال

$$\sin 62/5^\circ = ?$$



قدم اوّل: نزدیک‌ترین زوایای اصلی و فرعی به زاویه‌ی مورد نظر ما، زوایای 60° و 65° هستند که اتفاقاً فاصله‌ی زاویه‌ی مورد نظر ما نسبت به این دو زاویه، برابر است. پس کافیه میانگین اعداد طلایی مربوط به آن‌ها را محاسبه کنیم.

$$\left.\begin{matrix} M_{\sin 60^\circ} = 26 \\ M_{\sin 65^\circ} = 25 \end{matrix}\right\} \rightarrow M_{\sin 62/5^\circ} = \frac{25+26}{2} = 25/5$$

قدم دوم: زاویه رو با عدد طلایی به دست آمده، جمع می کنیم.

$62/5+25/5=88$

قدم سوم: دو رقم ممیز می‌زنیم.

$88 \longrightarrow 0/88$

جواب با تقریب چشمی $\sin ۶۲/۵^\circ = ۰/۸۸$

$\Rightarrow$

جواب با ماشین‌حساب مهندسی $\sin ۶۲/۵^\circ = ۰/۸۸۷$

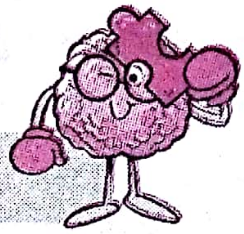
خوشتون اومد؛ نه جان من خوشتون اومد! به همین سادگی و با حفظ کردن ۱۰ تا عدد ناقابل، شما الان می‌تونید حتی سریع‌تر از ماشین‌حساب و با دقتی بسیاربسیار نزدیک به ماشین‌حساب، مقادیر sin همه‌ی زاویه‌های بین ۰ تا ۹۰° رو حساب کنید. اگه نمی‌تونید! از ۳ حالت خارج نیست؛

۱ یا اینکه جدول عددهای طلایی رو خوب حفظ نکردین. (که خواهشاً حفظش کنین)

۲ یا اینکه بلد نیستین دوتا عدد رو با هم جمع کنین (که در این صورت خیلی جای تبریک داره واقعاً! چون از اعتماد به نفس بسیار بالایی برخوردارین که با وجود اینکه جمع کردن بلد نیستین یه کتاب دستتون گرفتین که روش نوشته مثلثات!) واقعاً دست مریزاد!!

۳ یا اینکه می‌خواین منو دق بدین!

خوب ازتون می‌خوام تمریناتی که در ادامه اومده رو با دقت و سرعت انجام بدین و لذت ببرید. موفق باشید.



تمرینات پرورش فکری

۱ $\sin 11^\circ =$

۲ $\sin 21^\circ =$

۳ $\sin 31^\circ =$

۴ $\sin 41^\circ =$

۵ $\sin 51^\circ =$

۶ $\sin 61^\circ =$

۷ $\sin 71^\circ =$

۸ $\sin 81^\circ =$

۹ $\sin 9^\circ =$

۱۰ $\sin 19^\circ =$

۱۱ $\sin 29^\circ =$

۱۲ $\sin 39^\circ =$

۱۳ $\sin 49^\circ =$

۱۴ $\sin 59^\circ =$

۱۵ $\sin 69^\circ =$

۱۶ $\sin 79^\circ =$

۱۷ $\sin 16^\circ =$

۱۸ $\sin 26^\circ =$

۱۹ $\sin 36^\circ =$

۲۰ $\sin 46^\circ =$

۲۱ $\sin 56^\circ =$

۲۲ $\sin 66^\circ =$

۲۳ $\sin 76^\circ =$

۲۴ $\sin 86^\circ =$

۲۵ $\sin ۱۴^{\circ} =$

۲۶ $\sin ۲۴^{\circ} =$

۲۷ $\sin ۳۴^{\circ} =$

۲۸ $\sin ۴۴^{\circ} =$

۲۹ $\sin ۵۴^{\circ} =$

۳۰ $\sin ۶۴^{\circ} =$

۳۱ $\sin ۷۴^{\circ} =$

۳۲ $\sin ۸۴^{\circ} =$

۳۳ $\sin ۱۲^{\circ} =$

۳۴ $\sin ۲۲^{\circ} =$

۳۵ $\sin ۳۲^{\circ} =$

۳۶ $\sin ۴۲^{\circ} =$

۳۷ $\sin ۵۲^{\circ} =$

۳۸ $\sin ۶۲^{\circ} =$

۳۹ $\sin ۷۲^{\circ} =$

۴۰ $\sin ۸۲^{\circ} =$

۴۱ $\sin ۸^{\circ} =$

۴۲ $\sin ۱۸^{\circ} =$

۴۳ $\sin ۲۸^{\circ} =$

۴۴ $\sin ۳۸^{\circ} =$

۴۵ $\sin ۴۸^{\circ} =$

۴۶ $\sin ۵۸^{\circ} =$

۴۷ $\sin ۶۸^{\circ} =$

۴۸ $\sin ۷۸^{\circ} =$

۴۹ $\sin ۱۷^{\circ} =$

۵۰ $\sin ۲۷^{\circ} =$

۵۱ $\sin ۳۷^{\circ} =$

۵۲ $\sin ۴۷^{\circ} =$

۵۳ $\sin ۵۷^{\circ} =$

۵۴ $\sin ۶۷^{\circ} =$

۵۵ $\sin ۷۷^{\circ} =$

۵۶ $\sin ۸۷^{\circ} =$

۵۷ $\sin ۱۳^{\circ} =$

۵۸ $\sin ۲۳^{\circ} =$

۵۹ $\sin ۳۳^{\circ} =$

۶۰ $\sin ۴۳^{\circ} =$

۶۱ $\sin ۵۳^{\circ} =$

۶۲ $\sin ۶۳^{\circ} =$

۶۳ $\sin ۷۳^{\circ} =$

۶۴ $\sin ۸۳^{\circ} =$

۶۵ $\sin ۲۹^{\circ} =$

۶۶ $\sin ۲۱^{\circ} =$

۶۷ $\sin ۲۳^{\circ} =$

۶۸ $\sin ۲۸^{\circ} =$

۶۹ $\sin ۲۵^{\circ} =$

۷۰ $\sin ۲۷^{\circ} =$

۷۱ $\sin ۲۲^{\circ} =$

۷۲ $\sin ۲۴^{\circ} =$

۷۳ $\sin ۳۹^{\circ} =$

۷۴ $\sin ۳۱^{\circ} =$

۷۵ $\sin ۳۷^{\circ} =$

۷۶ $\sin ۳۵ =$

۷۷ $\sin ۳۴^{\circ} =$

۷۸ $\sin ۳۲^{\circ} =$

۷۹ $\sin ۳۸^{\circ} =$

۸۰ $\sin ۳۳^{\circ} =$

۸۱ $\sin ۶۱^{\circ} =$

۸۲ $\sin ۶۹^{\circ} =$

۸۳ $\sin ۶۵^{\circ} =$

۸۴ $\sin ۶۷^{\circ} =$

۸۵ $\sin ۶۴^{\circ} =$

۸۶ $\sin ۶۲^{\circ} =$

۸۷ $\sin ۶۸^{\circ} =$

۸۸ $\sin ۶۳^{\circ} =$

۸۹ $\sin ۷۱^\circ =$

۹۰ $\sin ۷۹^\circ =$

۹۱ $\sin ۷۵^\circ =$

۹۲ $\sin ۷۷^\circ =$

۹۳ $\sin ۷۴^\circ =$

۹۴ $\sin ۷۲^\circ =$

۹۵ $\sin ۷۸^\circ =$

۹۶ $\sin ۷۳^\circ =$

۹۷ $\sin ۲^\circ =$

۹۸ $\sin ۹^\circ =$

۹۹ $\sin ۵^\circ =$

۱۰۰ $\sin ۷^\circ =$

۱۰۱ $\sin ۴^\circ =$

۱۰۲ $\sin ۸^\circ =$

۱۰۳ $\sin ۳^\circ =$

۱۰۴ $\sin ۶^\circ =$

۱۰۵ $\sin ۱۱/۵^\circ =$

۱۰۶ $\sin ۲۶/۵^\circ =$

۱۰۷ $\sin ۳۴/۵^\circ =$

۱۰۸ $\sin ۴۶/۵^\circ =$

۱۰۹ $\sin ۵۱/۵^\circ =$

۱۱۰ $\sin ۶۹/۵^\circ =$

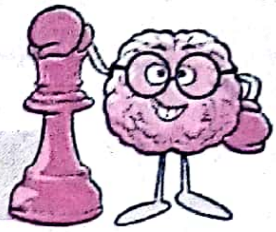
۱۱۱ $\sin ۲۲/۵^\circ =$

۱۱۲ $\sin ۷۹/۵^\circ =$

محاسبه‌ی مقدار عددی عبارت‌های شامل سینوس زوایای بین ۰ تا °۹۰:

الان ما می‌تونیم خیلی ســریع مقدار sin زوایای بین ۰ تا °۹۰ رو حساب کنیم، بدون اینکه نیاز باشه اتحادهای مثلثاتی رو بلد باشیم و یا فرمول‌های مثلثاتی رو به خاطر داشته باشیم و طرز استفاده از اون‌ها رو بدونیم. (هرچند که شــخصاً توصیه می‌کنم مثلثات رو به شیوه‌ی کلاسیک اون کامل یاد بگیرید، نه برای کنکور و امتحان بلکه برای اینکه حل مسائل پیچیده‌ی مثلثات برای اون‌هایی که مثلثات رو خوب یاد می‌گیرن، واقعاً جزء لذت‌بخش‌ترین قسمت‌های ریاضی محسوب می‌شه و لذتی که از اون شامل حالتون می‌شه قابل گفتن نیست، فقط باید خودتون حسش کنید.)

ضمناً توصیه‌ی اکید می‌کنم؛ کتاب‌های ضرب سریع، تقسیم سریع و دو فصــل اوّل کتاب جذر ســریع رو بخونید، چون با اســتفاده از اون‌ها دیگه واقعاً قادر خواهید بود در حد یه سلطان توی این قسمت ظاهر بشید!



تمرینات پرورش فکری

۱ $\sin 10^\circ \times \sin 20^\circ =$

۲ $\sin 30^\circ \times \sin 70^\circ =$

۳ $\sin 40^\circ \times \sin 50^\circ =$

۴ $\sin 80^\circ \times \sin 20^\circ =$

۵ $\sin 40^\circ \times \sin 60^\circ =$

۶ $\sin 10^\circ \times \sin 50^\circ =$

۷ $\sin 80^\circ \times \sin 80^\circ =$

۸ $\sin^2 40^\circ =$

۹ $\sin 15^\circ + \sin 35^\circ =$

۱۰ $\sin 10^\circ + \sin 40^\circ =$

۱۱ $\sin 20^\circ + \sin 50^\circ =$

۱۲ $\sin 40^\circ + \sin 50^\circ =$

۱۳ $\sin 80^\circ + \sin 70^\circ =$

۱۴ $\sin ۴۰^\circ + \sin ۹۰^\circ =$

۱۵ $\sin ۵۵^\circ + \sin ۷۵^\circ =$

۱۶ $\sin ۲۲/۵^\circ + \sin ۶۷/۵^\circ =$

۱۷ $\sin ۳۰^\circ - \sin ۱۰^\circ =$

۱۸ $\sin ۶۵^\circ - \sin ۳۵^\circ =$

۱۹ $\sin ۴۰^\circ - \sin ۲۰^\circ =$

۲۰ $\sin ۷۰^\circ + \sin ۵۰^\circ - \sin ۱۰^\circ =$

۲۱ $\sin ۲۰^\circ + \sin ۴۰^\circ + \sin ۸۰^\circ =$

۲۲ $\sin ۲۵^\circ - \sin ۱۵^\circ =$

۲۳ $\sin ۸۵^\circ - \sin ۳۵^\circ =$

۲۴ $\sin ۶۰^\circ - \sin ۵۰^\circ =$

۲۵ $\dfrac{\sin ۸۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ} =$

۲۶ $\dfrac{\sin ۶۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ} =$

۲۷ $\dfrac{\sin ۷۰^\circ}{\sin ۱۵^\circ} =$

۲۸ $\dfrac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۵۱^\circ} =$

۲۹ $\dfrac{۱}{\sin ۴۰^\circ} =$

۳۰ $\dfrac{۱}{\sin ۸۰^\circ} =$

۳۱ $\frac{\sin ۳۰^\circ + \sin ۷^\circ}{\sin ۳۷^\circ} =$

۳۲ $\frac{\sin ۲۰^\circ + \sin ۳۳^\circ}{\sin ۵۳^\circ} =$

۳۳ $\sin ۱۰^\circ + \sin ۲۰^\circ + \sin ۳۰^\circ =$

۳۴ $(\sin ۴۰^\circ + \sin ۲۰^\circ)(\sin ۵۰^\circ - \sin ۱۰^\circ) =$

۳۵ $\sin ۴۰^\circ + \sin ۵۰^\circ + \sin ۶۰^\circ =$

۳۶ $\sin ۷۵^\circ \times \sin ۱۵^\circ =$

۳۷ $\sin ۷۰^\circ + \sin ۸۰^\circ + \sin ۹۰^\circ =$

....

....

....

....

....

....

....

....

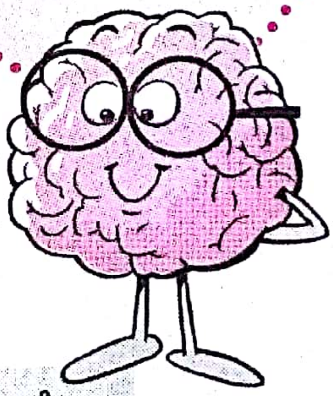
....

روش درونیابی خطی برای پیدا کردن عدد طلایی:

در اینجـا می‌خوام به شــما یاد بدم که چه‌جــوری مقادیر اعداد طلایی رو برای زوایای مختلف با روش دقیق به دست بیارید. اگه خــوب به مثال‌هایی که براتون حــل می‌کنم، توجه کنید متوجه سادگی اون‌ها خواهید شد.

مثال

$$\sin ۲۳^\circ = ?$$



قدم اوّل: باید عدد طلایی سینوس بــرای زاویه‌ی ۲۳ درجه رو حســاب کنیم. در اینجا می‌خــوام این کار رو بــا روش درونیابی خطــی انجام بدم. اوّل یه نگاهی به زاویه‌مون می‌کنیم تا ببینیم بین کدوم زوایای اصلی واقع شده. زاویه ۲۳° بیــن زوایای ۲۰° و ۳۰° اســت که اعداد طلایی اون‌ها رو حفظ هستیم.

α	۲۰°	۲۳°	۳۰°
$M_{\sin\alpha}$	۱۴	?	۲۰

برای اینکه عدد طلایی ۲۳° رو محاسبه کنیم، کافیه یه تناسب ببندیم. **این تناسب رو همین‌جوری که من بهتون یاد میدم تشکیل بدین.**

می‌گم از زاویه‌ی ۲۰° به زاویه‌ی ۳۰° که می‌ریم، چقدر به مقدار زاویه اضافه می‌شه؟ **پاسخ:** ۱۰°

$$۳۰^\circ - ۲۰^\circ = ۱۰^\circ$$

می‌گم از زاویه‌ی ۲۰° بــه زاویه‌ی ۳۰° که می‌ریم، چقدر به **عدد طلایی** اضافه می‌شه؟ **پاسخ:** ۶ تا (عدد طلایی زاویه‌ی ۳۰° برابر ۲۰ و عدد طلایی زاویه ۲۰° برابر ۱۴ است).

$$M_{\sin ۳۰^\circ} - M_{\sin ۲۰^\circ} = ۲۰ - ۱۴ = ۶$$

می‌گــم از زاویه‌ی ۲۰° می‌خوایم بــه زاویه‌ی ۲۳° بریم، چقدر به **مقدار زاویه** اضافه می‌شه؟ **پاسخ:** ۳°

+۱۰

+۳

α	۲۰°	۲۳°	۳۰°
$M_{\sin\alpha}$	۱۴	?	۲۰

x

+۶

حالا با اســتفاده از تناســب زیر می‌تونیم بگیم که چقدر باید به مقدار عدد طلایی زاویه‌ی ۲۰° اضافه بشه تا عدد طلایی زاویه‌ی ۲۳° به دست بیاد.

مقادیری که بــه عدد طلایی اضافه می‌شود.	مقادیری که بــه زاویه اضافه می‌شود.
۶	۱۰
$x = ?$	۳

این تناسب‌ها همیشه به سادگی حل می‌شن. همانطور که می‌بینید پاسخ تناسب برابر $x = \frac{۳\times۶}{۱۰} = ۱/۸$. این مقدارِ که باید به عدد طلایی زاویه‌ی ۲۰° اضافه بشه تا عدد طلایی زاویه‌ی ۲۳° به دست بیاد.

$$\Rightarrow M_{\sin ۲۳^\circ} = M_{\sin ۲۰^\circ} + ۱/۸$$

$$\Rightarrow M_{\sin ۲۳^\circ} = ۱۴ + ۱/۸ = ۱۵/۸$$

$$\Rightarrow \mathbf{M_{\sin ۲۳^\circ} = ۱۵/۸}$$

تمام شد! عدد طلایی سینوس زاویه ۲۳° برابر ۱۵/۸ است.

قدم دوم: برای به دست آوردن مقدار $\sin ۲۳^\circ$ کافیه عدد طلایی رو با خود زاویه جمع کنیم.

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = ۲۳ + ۱۵/۸ = ۳۸/۸$$

قدم سوم: دو رقم اعشار می‌زنیم.

$$۳۸/۸ \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم.}} ۰/۳۸۸$$

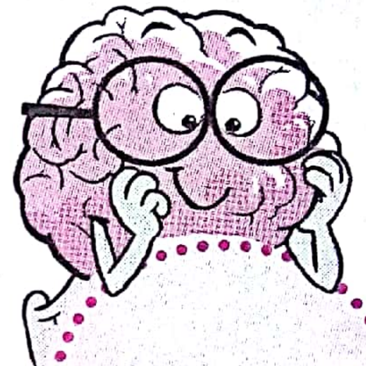
$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \sin ۲۳^\circ = ۰/۳۸۸ & \text{پاسخ به روش مؤلف} \\ \sin ۲۳^\circ = ۰/۳۹۰ & \text{پاسخ با ماشین‌حساب مهندسی} \end{array}$$

همانطور که می‌بینید جواب ما با جواب ماشین‌حساب مهندسی، فقط ۰/۰۰۲ اختلاف داره و این به این معنیِ که ما ترکوندیم، اصلاً نابود کردیم، خداشاهده دیوانه کردیم!

تذکر: البتــه همونطور که قبلاً هم گفتــم و الان باز تکرار می‌کنــم برای پیدا کردن sin زوایــای مختلف نیازی به این قدر دقت نداریم. (مگه اینکه قضیه حیثیتی باشه!)

خوب براتون بازم مثال حل می‌کنم تا قشنگ این روش رو یاد بگیرید.

زاویه‌ی ۳۶ درجه بین زوایای اصلی ۳۰° و ۴۰° است.



$$\sin ۳۶^\circ = ?$$

مثال

قدم اوّل: بسـیار خوب! برای به دسـت آوردن عــدد طلایی زاویه‌ی ۳۶° به این شــکل عمل می‌کنیم.

α	۳۰	۳۶	۴۰
$M_{\sin\alpha}$	۲۰	?	۲۴

می‌گیم زاویه از ۳۰° به ۴۰° که میره، ۱۰° بهش اضافه می‌شه.

عدد طلایی از ۲۰ به ۲۴ که میره، بهش ۴ تا اضافه می‌شه.

زاویه از ۳۰° به ۳۶° بره، ۶ تا بهش اضافه می‌شه.

حالا چقــدر باید به عدد طلایی زاویــه‌ی ۳۰° (یعنی عدد ۲۰) اضافه بشه تا عدد طلایی زاویه‌ی ۳۶° به دست بیاد؟

(این همه حرفی که زدیم تو جدول تناسب پایین خلاصه می‌شه.)

مقادیری که به عدد طلایی اضافه می‌شود.	مقادیری که به زاویه اضافه می‌شود.
۴	۱۰
x=۲/۴	۶

پس به اندازه‌ی ۲/۴ باید به عدد طلایی زاویه‌ی ۳۰° اضافه شود.

$$M_{\sin ۳۶^\circ} = M_{\sin ۳۰^\circ} + ۲/۴$$
$$= ۲۰ + ۲/۴ = ۲۲/۴$$

قدم دوم: زاویه رو با عدد طلایی مربوطه جمع می‌کنیم.

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = ۳۶ + M_{\sin ۳۶^\circ}$$
$$= ۳۶ + ۲۲/۴$$
$$= ۵۸/۴$$

قدم سوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

$$۵۸/۴ \longrightarrow ۰/۵۸۴$$

$\sin ۳۶^\circ = ۰/۵۸۴$ **پاسخ به روش مؤلف**

$\Rightarrow$

$\sin ۳۶^\circ = ۰/۵۸۷$ **پاسخ با ماشین‌حساب مهندسی**

همانطور که می‌بینید جواب ما با جواب ماشین‌حساب مهندسی فقط ۰/۰۰۳ اختلاف داره! پاشو درو باز کن انیشتین اومده! آره از توی قبر در اومده پشت دره، می‌خواد به شما تبریک بگه!

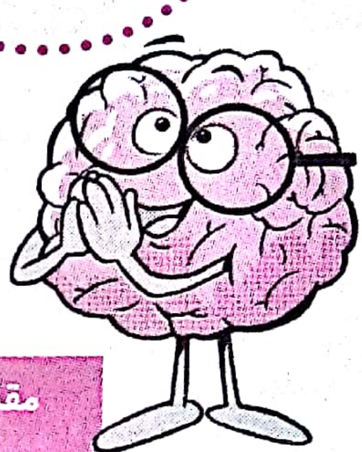
مثال

$$\sin ۷۳^\circ = ?$$

قدم اوّل: عدد طلایی رو با درونیابی خطی محاسبه می‌کنیم.

زاویه‌ی ۷۳° بین زوایای اصلی ۷۰° و ۸۰° واقع شده.

α	۷۰	۷۳	۸۰
$M_{\sin\alpha}$	۲۴	?	۱۸



تناسب را تشکیل می‌دهیم:

مقادیری که به عدد طلایی اضافه می‌شود.	مقادیری که به زاویه اضافه می‌شود.
۶-	۱۰
x=-۱/۸	۳

همانطور که می‌بینید وقتی ۱۰° به زاویه اضافه می‌شه، ۶ تا از عدد طلایی کم می‌شه. برای همین عدد ۶ رو با علامت منفی قرار دادیم.

$$\Rightarrow M_{\sin ۷۳^\circ} = M_{\sin ۷۰^\circ} - ۱/۸$$
$$= ۲۴ - ۱/۸$$
$$= ۲۲/۲$$

قدم دوم: زاویه رو با عدد طلایی مربوطه جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow \alpha + M_{\sin\alpha} = ۷۳ + ۲۲/۲ = ۹۵/۲$$

قدم سوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

$$\Rightarrow ۹۵/۲ \longrightarrow ۰/۹۵۲$$

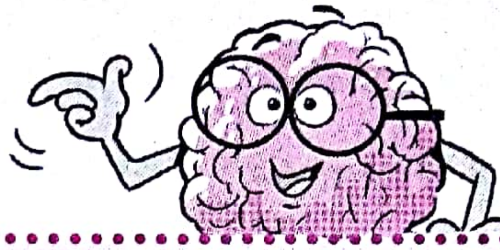
تمام شد!

پاسخ با روش مؤلف

پاسخ با ماشین‌حساب مهندسی

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \sin ۷۳^\circ = ۰/۹۵۲ \\ \sin ۷۳^\circ = ۰/۹۵۶ \end{array}$$

خوش باشید!



۶ تکنیک محاسبه‌ی سینوس زوایای بیش از ۹۰ درجه:

چند تا فرمول، خیلی خوب به ما کمک می‌کنه تا به راحتی sin زوایای بیش از 90° رو محاسبه کنیم. اون فرمول‌ها که حتماً در کتاب‌های دیگه‌ی مثلثات هم اونا رو دیدین، این‌ها هستن.

فرمول‌ها برحسب درجه	فرمول‌ها برحسب رادیان
$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$	۱) $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$	۲) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$
$\sin(360+\alpha)=\sin\alpha$	۳) $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(360-\alpha)=-\sin\alpha$	۴) $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$

این فرمول‌های محترم چی میگن؟

فرمول $\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$ داره میگه: سینوس زاویه‌ی 180° منهای هرچی، برابر است با سینوس همون چی!

حالا یعنی چی؟ یعنی سینوس زاویه‌ی 180° منهای هویج برابر است با سینوس هویج! خُب به ما چه؟

خُب این خیلی باحاله! در واقع این فرمول محترم میگه وظیفه‌ی ما اینه که وقتی می‌خوایم sin یه زاویه که از ۹۰° بیشتره و از ۱۸۰° کم‌تره رو محاسبه کنیم، باید اون زاویه رو به صورت ۱۸۰° منهای یه چیزی بازنویسی کنیم تا راحت به جواب برسیم.

مثلاً وقتی می‌خوایم $\sin ۱۴۰^\circ$ رو محاسبه کنیم، کافیه زاویه‌ی ۱۴۰ درجه رو به صورت ۱۸۰° منهای ۴۰° بنویسیم.

$$\sin ۱۴۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ)$$

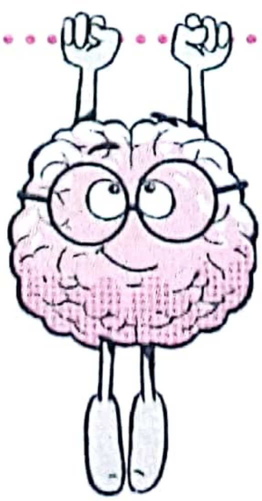
با استفاده از همین فرمول محترم:

$$\sin(۱۸۰^\circ - ۴۰^\circ) = \sin ۴۰^\circ$$

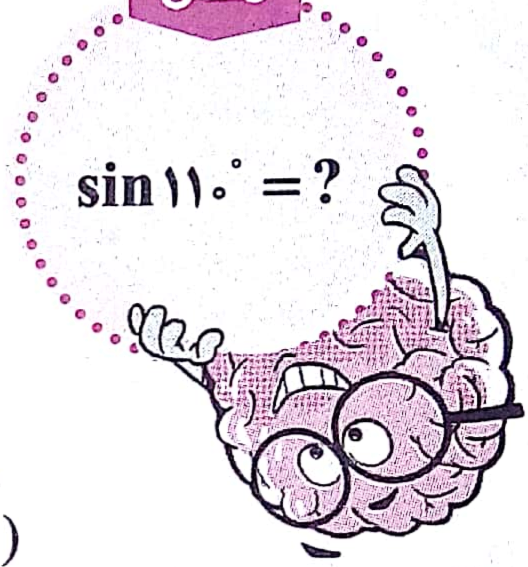
دیدین این فرموله چقدر به درد خورد. پس ما فهمیدیم $\sin ۱۴۰^\circ$ برابر $\sin ۴۰^\circ$ است. محاسبه‌ی $\sin ۴۰^\circ$ که خوراکِ ماست!

(بلدیم عینِ هلو حسابش کنیم.) $\sin ۴۰^\circ = ۰/۶۴$

$$\Rightarrow \sin ۱۴۰^\circ = ۰/۶۴$$



مثال



چــون زاویه از ۹۰° بیشـــتره و از ۱۸۰° کم‌تره، وظیفه‌ی ما ایجاب می‌کنـــه اون رو به صورت ۱۸۰° منهای یه چیزی بازنویسی کنیم.

$$\Rightarrow \sin ۱۱۰^\circ = \sin(\overbrace{۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ}^{۱۱۰^\circ})$$

فرمول عزیزمون میگه سینوس ۱۸۰° منهای هرچی برابر است با سینوس همون چی! $\sin(۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ) = \sin ۷۰^\circ$

پس کافیه سینوس ۷۰° رو محاسبه کنیم که خوراکمونه!

$$\sin ۷۰^\circ = ۰/۹۴$$

$$\sin ۱۱۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ) = \sin ۷۰^\circ = ۰/۹۴$$

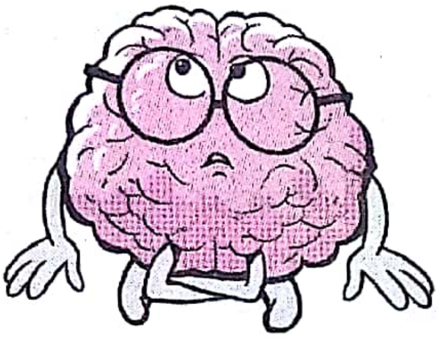
$$\Rightarrow \sin ۱۱۰^\circ = ۰/۹۴$$

تمام شد!

اگه زاویـــه‌ی مورد نظرمون از ۱۸۰° بیشـــتر بود و از ۲۷۰° کم‌تر بـــود، از فرمـــول محترم $\sin(۱۸۰^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$ اســتفاده می‌کنیـــم. یعنی زاویه رو به صورت ۱۸۰° بـــه اضافه یه مقداری بازنویســـی‌می‌کنیم.

مثال

$$\sin 230^\circ = ?$$



$$\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ) \xrightarrow{\text{با استفاده از فرمول محترم}}$$

$$-\sin 50^\circ \xrightarrow{\text{محاسبه اش خوراکمونه}} -0/76$$

$$\Rightarrow \sin 230^\circ = -0/76$$

تمام شد!

برای زوایای بزرگ‌تر هم از دو تا فرمول دوست‌داشتنی استفاده می‌کنیم.

$\sin(360+\alpha)=\sin\alpha$	$\sin(360-\alpha)=-\sin\alpha$

ضمناً فرمول‌های دوست‌داشتنی ما در حالت کلی به صورت زیر هستند:

$$\sin(\overbrace{2k\pi}^{\text{مضارب } 360^\circ}+\alpha)=\sin\alpha$$

$$\sin(\overbrace{2k\pi}^{\text{مضارب } 360^\circ}-\alpha)=-\sin\alpha$$

۷ تکنیک محاسبه‌ی سینوس برای زوایای منفی:

یک فرمول بسیار زیبا فاتحه‌ی تمام زوایای منفی رو برای ما قرائت می‌کنه! اون فرمول زیبا هم اینه؛

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

مثلاً اگـــر در جایی بخواهیم $\sin(-۴۰^\circ)$ رو حســـاب کنیم، کافیه $\sin ۴۰^\circ$ رو حســـاب کنیم (اینکار که برای ما آب خوردنه!) و یک علامت منفی پشت اون قرار بدیم. این‌جوری:

مثال ۱ $\sin(-۴۰^\circ) = ?$

حل:

$$\sin(-۴۰^\circ) = -\sin ۴۰^\circ = -۰/۶۴$$

مثال ۲ $\sin(-۱۱۰^\circ) = ?$

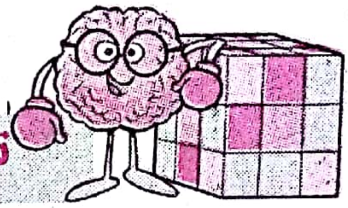
حل:

$$\sin(-۱۱۰^\circ) = -\sin(۱۱۰^\circ) = -\sin(۱۸۰^\circ - ۷۰^\circ) = -\sin ۷۰^\circ$$

می‌دانیم که: $\sin ۷۰^\circ = ۰/۹۴$

$$\Rightarrow \sin(-۱۱۰^\circ) = -۰/۹۴$$

در همین مـکان و همین لحظه، مجلس ترحیم برای زوایای منفی هم برگزار شد؛ دیگه نگران اون‌ها هم نباشید.



تمرینات پرورش فکری

۱) $\sin 170^\circ =$

۲) $\sin 160^\circ =$

۳) $\sin 140^\circ =$

۴) $\sin 130^\circ =$

۵) $\sin 115^\circ =$

۶) $\sin 180^\circ =$

۷) $\sin 150^\circ =$

۸) $\sin 100^\circ =$

۹) $\sin 175^\circ =$

۱۰) $\sin 165^\circ =$

۱۱) $\sin 145^\circ =$

۱۲) $\sin 135^\circ =$

۱۳) $\sin 125^\circ =$

۱۴) $\sin 115^\circ =$

۱۵) $\sin 105^\circ =$

۱۶) $\sin 155^\circ =$

۱۷) $\sin 190^\circ =$

۱۸) $\sin 200^\circ =$

۱۹) $\sin 210^\circ =$

۲۰) $\sin 220^\circ =$

۲۱) $\sin 230^\circ =$

۲۲) $\sin 240^\circ =$

۲۳) $\sin 250^\circ =$

۲۴) $\sin 260^\circ =$

۲۵ $\sin 265^\circ =$

۲۶ $\sin 255^\circ =$

۲۷ $\sin 245^\circ =$

۲۸ $\sin 235^\circ =$

۲۹ $\sin 225^\circ =$

۳۰ $\sin 215^\circ =$

۳۱ $\sin 205^\circ =$

۳۲ $\sin 195^\circ =$

۳۳ $\sin 350^\circ =$

۳۴ $\sin 340^\circ =$

۳۵ $\sin 330^\circ =$

۳۶ $\sin 320^\circ =$

۳۷ $\sin 310^\circ =$

۳۸ $\sin 300^\circ =$

۳۹ $\sin 290^\circ =$

۴۰ $\sin 280^\circ =$

۴۱ $\sin 355^\circ =$

۴۲ $\sin 345^\circ =$

۴۳ $\sin 335^\circ =$

۴۴ $\sin 325^\circ =$

۴۵ $\sin 315^\circ =$

۴۶ $\sin 305^\circ =$

۴۷ $\sin 295^\circ =$

۴۸ $\sin 285^\circ =$

۴۹ $\sin 370^\circ =$

۵۰ $\sin 380^\circ =$

۵۱ $\sin 390^\circ =$

۵۲ $\sin 400^\circ =$

۵۳ $\sin 410^\circ =$

۵۴ $\sin 420^\circ =$

۵۵ $\sin 430^\circ =$

۵۶ $\sin 440^\circ =$

۵۷ $\sin ۳۷۵^\circ =$

۵۸ $\sin ۳۸۵^\circ =$

۵۹ $\sin ۳۹۵^\circ =$

۶۰ $\sin ۴۰۵^\circ =$

۶۱ $\sin ۴۱۵^\circ =$

۶۲ $\sin ۴۲۵^\circ =$

۶۳ $\sin ۴۳۵^\circ =$

۶۴ $\sin ۴۴۵^\circ =$

۶۵ $\sin ۱۰۰^\circ + \sin ۲۰۰^\circ =$

۶۶ $\sin ۲۷۰^\circ + \sin ۲۸۰^\circ + \sin ۲۹۰^\circ =$

۶۷ $\sin ۳۰۰^\circ + \sin ۴۰۰^\circ =$

۶۸ $\sin ۱۲۰^\circ + \sin ۱۶۰^\circ + \sin ۲۰۰^\circ - \sin ۲۴۰^\circ =$

۶۹ $\sin ۱۵۰^\circ + \sin ۲۰۰^\circ =$

۷۰ $\sin ۱۱۰^\circ + \sin ۲۱۰^\circ + \sin ۳۱۰^\circ - \sin ۵۰^\circ =$

۷۱ $\sin ۱۱۰^\circ + \sin ۱۳۰^\circ + \sin ۱۵۰^\circ =$

۷۲ $(\sin ۳۱۵^\circ + \sin ۳۴۵^\circ) - (\sin ۲۱۵^\circ - \sin ۲۴۵^\circ) =$

فصل دوم

۸ تکنیک تخمین مقادیر مختلف تابع کسینوس وقتی زاویه بین صفر تا ۹۰ درجه باشد.

الان که ما قادریم sin هر زاویه‌ای رو به راحتی محاسبه کنیم با استفاده از یک فرمول نازنین می‌تونیم cos هر زاویه‌ای رو هم به راحتی محاسبه کنیم. اون فرمول نازنین اینه:

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha \\ \sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha \end{cases}$$

فرمول‌های بالا رو می‌تونیم به این صورت هم بیان کنیم؛

$$\alpha+\beta=۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\cos\beta \\ \cos\alpha=\sin\beta \end{cases}$$

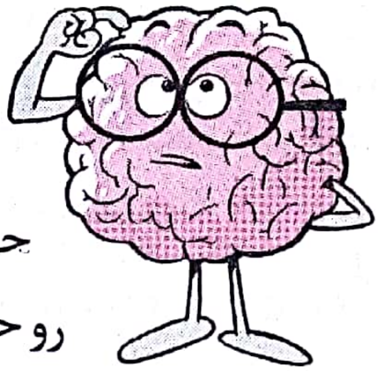
این فرمول زیبا میگه که اگه مجموع دو زاویه ۹۰ درجه باشه، سینوس یکی برابر است با کسینوس دیگری. یعنی می‌تونیم این موضوع رو این‌جوری هم بنویسیم:

فرمول‌ها برحسب درجه	فرمول‌ها برحسب رادیان
$\cos(۹۰^\circ-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$
$\sin(۹۰^\circ-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha$

خب! این یعنی به جای اینکه cos یه زاویه رو حساب کنیم، می‌تونیم sin متمم همون زاویه رو حساب کنیم.

مثال

$$\cos 20^\circ = ?$$



ما می‌خوایم $\cos 20^\circ$ رو حساب کنیم، امّا فقط بلدیم $\sin$ هر زاویه رو حساب کنیم! پس میایم متمم زاویه‌ی 20° رو حساب می‌کنیم. $90 - 20 = 70^\circ$ و بعد $\sin$ متمم رو حساب می‌کنیم.

$$\cos 20^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \sin 70^\circ$$

مقدار $\sin 70^\circ$ رو هم که ما رو هوا جواب میدیم.

$$\sin 70^\circ = 0/94$$

$$\Rightarrow \cos 20^\circ = 0/94$$

تمام شد!

مثال

$$\cos 80^\circ = ?$$

به جای اینکه $\cos 80^\circ$ رو حساب کنیم، می‌تونیم $\sin$ متمم 80° یعنی 10° رو حساب کنیم و به راحتی خودمون رو به جواب برسونیم.

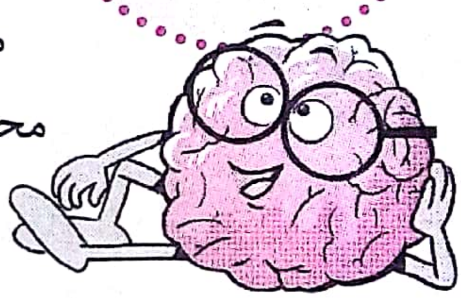
$$\cos ۸۰^\circ = \cos(۹۰^\circ - ۱۰^\circ) = \sin ۱۰^\circ = ۰/۱۷$$

$$\Rightarrow \cos ۸۰^\circ = ۰/۱۷$$

تمام شد!

مثال

$$\cos ۶۵^\circ = ?$$



متمم زاویه‌ی ۶۵° رو حساب می‌کنیم.

$$۹۰ - ۶۵^\circ = ۲۵^\circ$$

$$\Rightarrow \cos ۶۵^\circ = \sin ۲۵^\circ$$

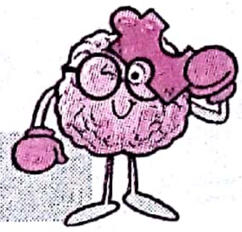
مقدار $\sin ۲۵^\circ$ را هم به راحتی محاسبه می‌کنیم.

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = ۲۵ + ۱۷ = ۴۲$$

$$\Rightarrow \sin ۲۵^\circ = ۰/۴۲$$

$$\Rightarrow \cos ۶۵^\circ = ۰/۴۲$$

تمام شد!



تمرینات پرورش فکری

۱ $\cos 10^\circ =$

۲ $\cos 20^\circ =$

۳ $\cos 30^\circ =$

۴ $\cos 40^\circ =$

۵ $\cos 50^\circ =$

۶ $\cos 60^\circ =$

۷ $\cos 70^\circ =$

۸ $\cos 80^\circ =$

۹ $\cos 5^\circ =$

۱۰ $\cos 15^\circ =$

۱۱ $\cos 25^\circ =$

۱۲ $\cos 35^\circ =$

۱۳ $\cos 45^\circ =$

۱۴ $\cos 55^\circ =$

۱۵ $\cos 65^\circ =$

۱۶ $\cos 75^\circ =$

۱۷ $\cos 9^\circ =$

۱۸ $\cos 19^\circ =$

۱۹ $\cos 29^\circ =$

۲۰ $\cos 39^\circ =$

۲۱ $\cos 49^\circ =$

۲۲ $\cos 59^\circ =$

۲۳ $\cos 69^\circ =$

۲۴ $\cos 79^\circ =$

۲۵ $\cos 16^\circ =$

۲۶ $\cos 26^\circ =$

۲۷ $\cos 36^\circ =$

۲۸ $\cos 46^\circ =$

۲۹ $\cos 56^\circ =$

۳۰ $\cos 66^\circ =$

۳۱ $\cos 76^\circ =$

۳۲ $\cos 86^\circ =$

۳۳ $\cos ۱۴^{\circ} =$

۳۴ $\cos ۲۴^{\circ} =$

۳۵ $\cos ۳۴^{\circ} =$

۳۶ $\cos ۴۴^{\circ} =$

۳۷ $\cos ۵۴^{\circ} =$

۳۸ $\cos ۶۴^{\circ} =$

۳۹ $\cos ۷۴^{\circ} =$

۴۰ $\cos ۸۴^{\circ} =$

۴۱ $\cos ۱۲^{\circ} =$

۴۲ $\cos ۲۲^{\circ} =$

۴۳ $\cos ۳۲^{\circ} =$

۴۴ $\cos ۴۲^{\circ} =$

۴۵ $\cos ۵۲^{\circ} =$

۴۶ $\cos ۶۲^{\circ} =$

۴۷ $\cos ۷۲^{\circ} =$

۴۸ $\cos ۸۲^{\circ} =$

۴۹ $\cos ۸^{\circ} =$

۵۰ $\cos ۱۸^{\circ} =$

۵۱ $\cos ۲۸^{\circ} =$

۵۲ $\cos ۳۸^{\circ} =$

۵۳ $\cos ۴۸^{\circ} =$

۵۴ $\cos ۵۸^{\circ} =$

۵۵ $\cos ۶۸^{\circ} =$

۵۶ $\cos ۷۸^{\circ} =$

۵۷ $\cos ۱۷^{\circ} =$

۵۸ $\cos ۲۷^{\circ} =$

۵۹ $\cos ۳۷^{\circ} =$

۶۰ $\cos ۴۷^{\circ} =$

۶۱ $\cos ۵۷^{\circ} =$

۶۲ $\cos ۶۷^{\circ} =$

۶۳ $\cos ۷۷^{\circ} =$

۶۴ $\cos ۸۷^{\circ} =$

۶۵ cos ۱۳° =

۶۶ cos ۲۳° =

۶۷ cos ۳۳° =

۶۸ cos ۴۳° =

۶۹ cos ۵۳° =

۷۰ cos ۶۳° =

۷۱ cos ۷۳° =

۷۲ cos ۸۳° =

۷۳ cos ۵۶° =

۷۴ cos ۵۱° =

۷۵ cos ۵۵° =

۷۶ cos ۵۷° =

۷۷ cos ۵۴° =

۷۸ cos ۵۲° =

۷۹ cos ۵۸° =

۸۰ cos ۵۳° =

۸۱ cos ۸۹° =

۸۲ cos ۸۱° =

۸۳ cos ۸۵° =

۸۴ cos ۸۷° =

۸۵ cos ۸۳° =

۸۶ cos ۸۸° =

۸۷ cos ۸۲° =

۸۸ cos ۸۴° =

۸۹ cos ۲۹° =

۹۰ cos ۲۱° =

۹۱ cos ۲۵° =

۹۲ cos ۲۷° =

۹۳ cos ۲۳° =

۹۴ cos ۲۸° =

۹۵ cos ۲۲° =

۹۶ cos ۲۴° =

۹۷ cos ۳۹° =

۹۸ cos ۳۱° =

۹۹ cos ۳۷° =

۱۰۰ cos ۳۵° =

۱۰۱ cos ۳۴° =

۱۰۲ cos ۳۲° =

۱۰۳ cos ۳۸° =

۱۰۴ cos ۳۳° =

۱۰۵ $\cos ۶۱^\circ =$
۱۰۶ $\cos ۶۹^\circ =$
۱۰۷ $\cos ۶۵^\circ =$
۱۰۸ $\cos ۶۷^\circ =$

۱۰۹ $\cos ۶۴^\circ =$
۱۱۰ $\cos ۶۲^\circ =$
۱۱۱ $\cos ۶۸^\circ =$
۱۱۲ $\cos ۶۳^\circ =$

۱۱۳ $\cos ۷۱^\circ =$
۱۱۴ $\cos ۷۹^\circ =$
۱۱۵ $\cos ۷۵^\circ =$
۱۱۶ $\cos ۷۷^\circ =$

۱۱۷ $\cos ۷۴^\circ =$
۱۱۸ $\cos ۷۲^\circ =$
۱۱۹ $\cos ۷۸^\circ =$
۱۲۰ $\cos ۷۳^\circ =$

۱۲۱ $\cos ۲^\circ =$
۱۲۲ $\cos ۹^\circ =$
۱۲۳ $\cos ۵^\circ =$
۱۲۴ $\cos ۷^\circ =$

۱۲۵ $\cos ۴^\circ =$
۱۲۶ $\cos ۸^\circ =$
۱۲۷ $\cos ۳^\circ =$
۱۲۸ $\cos ۶^\circ =$

۱۲۹ $\cos ۱۱/۵^\circ =$
۱۳۰ $\cos ۲۶/۵^\circ =$
۱۳۳ $\cos ۳۴/۵^\circ =$
۱۳۴ $\cos ۴۶/۵^\circ =$

۱۳۱ $\cos ۵۱/۵^\circ =$
۱۳۲ $\cos ۶۹/۵^\circ =$
۱۳۵ $\cos ۲۲/۵^\circ =$
۱۳۶ $\cos ۷۹/۵^\circ =$

■ محاسبه‌ی عبارت‌های مثلثاتی شامل کسینوس زوایای مختلف:

۱۳۷ $\cos ۱۰^\circ \times \cos ۲۰^\circ =$
۱۳۸ $\cos ۳۰^\circ \times \cos ۷۰^\circ =$
۱۳۹ $\cos ۴۰^\circ \times \cos ۵۰^\circ =$
۱۴۰ $\cos ۸۰^\circ \times \cos ۲۰^\circ =$
۱۴۱ $\cos ۴۰^\circ \times \cos ۶۰^\circ =$

۱۴۲ $\cos ۱۰^\circ \times \cos ۵۰^\circ =$

۱۴۳ $\cos ۸۰^\circ \times \cos ۸۰^\circ =$

۱۴۴ $\cos^۲ ۴۰^\circ =$

۱۴۵ $\cos ۱۵^\circ + \cos ۳۵^\circ =$

۱۴۶ $\cos ۱۰^\circ + \cos ۴۰^\circ =$

۱۴۷ $\cos ۲۰^\circ + \cos ۵۰^\circ =$

۱۴۸ $\cos ۴۰^\circ + \cos ۵۰^\circ =$

۱۴۹ $\cos ۸۰^\circ + \cos ۷۰^\circ =$

۱۵۰ $\cos ۴۰^\circ + \cos ۹۰^\circ =$

۱۵۱ $\cos ۵۵^\circ + \cos ۷۵^\circ =$

۱۵۲ $\cos ۲۲/۵^\circ + \cos ۶۷/۵^\circ =$

۱۵۳ $\cos ۳۰^\circ - \cos ۱۰^\circ =$

۱۵۴ $\cos ۶۵^\circ - \cos ۳۵^\circ =$

۱۵۵ $\cos ۴۰^\circ - \cos ۲۰^\circ =$

۱۵۶ $\cos ۲۵^\circ - \cos ۱۵^\circ =$

۱۵۷ $\cos ۸۵^\circ - \cos ۳۵^\circ =$

۱۵۸ $\cos ۶۰^\circ - \cos ۵۰^\circ =$

۱۵۹ $\cos ۷۰^\circ + \cos ۵۰^\circ - \cos ۱۰^\circ =$

۱۶۰ $\cos ۲۰^\circ + \cos ۴۰^\circ + \cos ۸۰^\circ =$

۱۶۱ $\dfrac{\cos ۸۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} =$

۱۶۲ $\dfrac{\cos ۸۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} =$

۱۶۳ $\dfrac{۱}{\cos ۴۰^\circ} =$

۱۶۴ $\dfrac{۱}{\cos ۸۰^\circ} =$

۱۶۵ $\dfrac{\cos ۷۰^\circ}{\cos ۱۵^\circ} =$

۱۶۶ $\dfrac{\cos ۴۵^\circ}{\cos ۵۱^\circ} =$

۱۶۷ $\dfrac{\cos ۳۰^\circ + \cos ۷^\circ}{\cos ۳۷^\circ} =$

۱۶۸ $\dfrac{\cos ۲۰^\circ + \cos ۳۳^\circ}{\cos ۵۳^\circ} =$

۱۶۹ $\cos ۷۵^\circ \times \cos ۱۵^\circ =$

۱۷۰ $\dfrac{\cos^{۲} ۸۰^\circ - \cos^{۲} ۳۵^\circ}{\sin^{۲} ۳۰^\circ} =$

۱۷۱ $\dfrac{(\cos^{۲} ۲۰^\circ + \cos^{۲} ۸۰^\circ)}{\cos ۳۷^\circ} =$

۱۷۲ $\cos ۴۰^\circ + \cos ۵۰^\circ + \cos ۶۰^\circ =$

۱۷۳ $\cos ۱۰^\circ + \cos ۲۰^\circ + \cos ۳۰^\circ =$

۱۷۴ $\cos ۷۰^\circ + \cos ۸۰^\circ + \cos ۹۰^\circ =$

۱۷۵ $\dfrac{\cos ۸۰^\circ + \cos ۶۰^\circ + \cos ۴۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} =$

۱۷۶ $(\cos ۴۰^\circ + \cos ۲۰^\circ)(\cos ۵۰^\circ - \cos ۱۰^\circ) =$

....

....

....

....

....

....

....

....

۹ تکنیک محاسبه‌ی کسینوس زوایای بیش از ۹۰ درجه و زوایای منفی:

از چندتا فرمولِ خوب می‌تونیم استفاده کنیم و زوایای بیش از 90° رو به راحتی حساب کنیم.

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

$$\cos(180+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\cos(360+\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos(360-\alpha)=\cos\alpha$$

با استفاده از این فرمول‌ها به راحتی زوایای منفی و بزرگ‌تر از 90° رو هم می‌تونیم حساب کنیم.

مثال ۱ $\cos(-20^\circ)=?$

حل

$$\cos(-20^\circ)=\cos 20^\circ=\sin 70^\circ=0/94$$

$$\Rightarrow \cos(-20^\circ)=0/94$$

تمام شد!

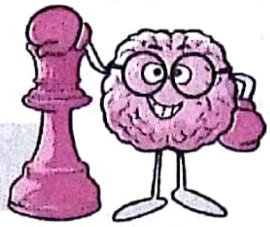
مثال ۱ $\cos(130^\circ)=?$

حل

$$\cos 130^\circ=\cos(180^\circ-50^\circ)=-\cos 50^\circ=-\sin 40^\circ=-0/64$$

$$\Rightarrow \cos 130^\circ=-0/64$$

تمام شد!



تمرینات پرورش فکری

۱. cos ۳۵۰° =

۲. cos ۳۴۰° =

۳. cos ۳۳۰° =

۴. cos ۳۲۰° =

۵. cos ۳۱۰° =

۶. cos ۳۰۰° =

۷. cos ۲۹۰° =

۸. cos ۲۸۰° =

۹. cos ۳۵۵° =

۱۰. cos ۳۴۵° =

۱۱. cos ۳۳۵° =

۱۲. cos ۳۲۵° =

۱۳. cos ۳۱۵° =

۱۴. cos ۳۰۵° =

۱۵. cos ۲۹۵° =

۱۶. cos ۲۸۵° =

۱۷. cos ۳۷۰° =

۱۸. cos ۳۸۰° =

۱۹. cos ۳۹۰° =

۲۰. cos ۴۰۰° =

۲۱. cos ۴۱۰° =

۲۲. cos ۴۲۰° =

۲۳. cos ۴۳۰° =

۲۴. cos ۴۴۰° =

۲۵ $\cos ۳۷۵^\circ =$

۲۶ $\cos ۳۸۵^\circ =$

۲۷ $\cos ۳۹۵^\circ =$

۲۸ $\cos ۴۰۵^\circ =$

۲۹ $\cos ۴۱۵^\circ =$

۳۰ $\cos ۴۲۵^\circ =$

۳۱ $\cos ۴۳۵^\circ =$

۳۲ $\cos ۴۴۵^\circ =$

محاسبه‌ی عبارت‌های مثلثاتی:

۳۳ $\cos ۱۰۰^\circ + \cos ۲۰۰^\circ =$

۳۴ $\cos ۲۷۰^\circ + \cos ۲۸۰^\circ + \cos ۲۹۰^\circ =$

۳۵ $\cos ۳۰۰^\circ + \cos ۴۰۰^\circ =$

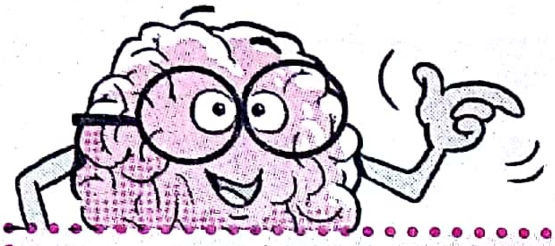
۳۶ $\cos ۱۲۰^\circ + \cos ۱۶۰^\circ + \cos ۲۰۰^\circ + \cos ۲۴۰^\circ =$

۳۷ $\cos ۱۵۰^\circ + \cos ۲۰۰^\circ =$

۳۸ $\cos ۱۱۰^\circ + \cos ۲۱۰^\circ + \cos ۳۱۰^\circ - \cos ۴۱۰^\circ =$

۳۹ $\cos ۱۱۰^\circ + \cos ۱۳۰^\circ + \cos ۱۵۰^\circ =$

۴۰ $(\cos ۳۱۵^\circ + \cos ۳۴۵^\circ) - (\cos ۲۱۵^\circ - \cos ۳۰۰^\circ) =$



فصل سوم

۱۰ تکنیک تخمین مقادیـــر مختلف تابع محترم تانژانت وقتی که زاویه بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد.

خوب حتماً همه‌ی شـــما می‌دونید که: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و الان اگـــه بخواید مثلاً $\tan 20^\circ$ رو حســـاب کنید، می‌تونید مقدار $\sin 20^\circ$ رو بر $\cos 20^\circ$ تقسیم کنید و خودتون رو به جواب برسونید. این‌جوری:

$$\tan 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{0/34}{0/94} = \frac{34}{94} = \frac{17}{47}$$

امّا برای اینکه راحت‌تر و ســـریع‌تر بتونیـــد این‌کار رو انجام بدید، پیشـــنهاد می‌کنم حتماً به این روشی که میگم مسائل رو حل کنید. یه جـــدول براتون تدارک دیدم به نام «**جدول طلایی ملینا برای تانژانت**». این جدول هم طبق معمول دوتا سطر داره؛ در سطر اوّل مقادیر زوایای اصلی از ۰ تا 85° رو تـــو خودش جا داده ($\tan 90^\circ$ نداریم!) و در ســـطر دوم هم «اعداد طلایی تانژانت» زوایا رو قرار دادم. این جدول محترم رو می‌تونید در صفحه‌ی بعد ببینید.

α	۰°	۱۰°	۲۰°	۳۰°	۴۰°
$M_{\tan\alpha}$	۰	۷	۱۶	۲۷	۴۴
α	۵۰°	۶۰°	۷۰°	۸۰°	۸۵°
$M_{\tan\alpha}$	۶۹	۱۱۰	۲۰۴	۴۸۷	۱۰۵۸

برای به دســت آوردن مقادیر مختلف تابع tan فقط کافیه مراحل زیر رو انجام بدید.

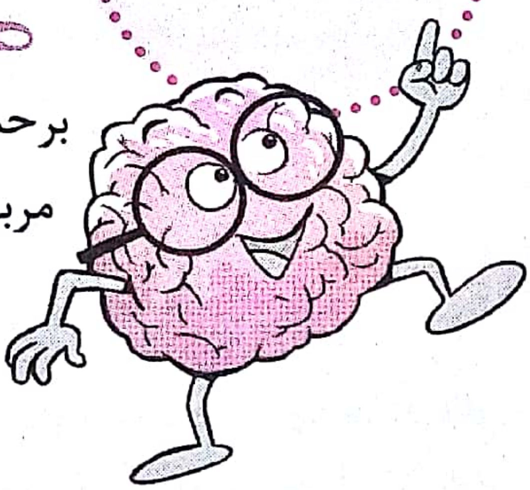
قـدم اوّل: مقدار عدد طلایی مربوط به زاویه مورد نظر رو پیدا کنید. (برای زوایایی که مقدار آن‌ها در جدول نیومده از درونیابی خطی استفاده کنید.)

قدم دوم: مقدار زاویه برحسب درجه رو با عدد طلایی تانژانت جمع کنید. $(\alpha+M_{\tan\alpha})$

قدم سوم: دو رقم به اعشار بروید.

مثال

$\tan ۲۰^\circ = ?$



قدم اوّل: عدد طلایی مربوط به زاویه ۲۰° در جدول به وضوح مشخص شده و برابر ۱۶ است.

قدم دوم: مقدار زاویه برحسب درجه رو با عدد طلایی مربوط به آن جمع می‌کنیم.

۲۰+۱۶=۳۶

قدم سوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

$$۳۶ \xrightarrow{\text{دو رقم به اعشار می‌رویم.}} ۰/۳۶$$

تمام شد! ما به جواب رسیدیم. $\Rightarrow \tan ۲۰^\circ = ۰/۳۶$

به همین سادگی.

حالا تمرینات رو حل کنید تا بهتون یه چیزی بگم یکم حالتون بهتر بشه!

تمرینات دست‌گرمی

۱ $\tan ۱۰^{\circ} =$

۲ $\tan ۲۰^{\circ} =$

۳ $\tan ۳۰^{\circ} =$

۴ $\tan ۴۰^{\circ} =$

۵ $\tan ۵۰^{\circ} =$

۶ $\tan ۶۰^{\circ} =$

۷ $\tan ۷۰^{\circ} =$

۸ $\tan ۸۰^{\circ} =$

استراحت فکری

مطمئن‌ترین راه برای رسیدن به موفقیت
این است که: یکبار دیگر هم امتحان کنی.

ادیسون

۲ تذکر مهم:

۱ اگر دقت خیلی زیادی لازم ندارید (که در اکثر مواقع هم همین‌طور است حتی در کنکور!) برای اینکه راحت‌تر باشید، می‌تونم بهتون پیشنهاد کنم که اعداد زیر رو به جای مقادیر طلایی اصلی تانژانت در نظر بگیرید و حفظشون کنید. این اعداد هم خوش‌تیپ‌تر هستند و هم حفظ کردنشون راحت‌تره و هم برای زوایای میانی استفاده از اون‌ها برامون راحت‌تره!

■ **جدول مقادیر تقریبی اعداد طلایی تانژانت:**

α	0°	10°	20°	30°	40°
$M_{\tan\alpha}$ تقریبی	۰	۷	۱۶	۲۸	۴۴
α	50°	60°	70°	80°	85°
$M_{\tan\alpha}$ تقریبی	۷۰	۱۱۰	۲۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰

حفظ کردن جدول بالا از جدول اصلی‌مون راحت‌تره. درسته که کمی دقت مارو پایین میاره، ولی در اصل ما به دقت خیلی‌خیلی بالایی هم احتیاج نداریم. (مگه اینکه قضیه حیثیتی باشه! که در اونجا از اعداد اصلی استفاده خواهیم کرد!)

۲ همانطور که می‌بینید در جدول، تانژانت رو فقط تا زاویه‌ی 85° خواهیم داشت و از 85° تا 90° هیچ عدد طلایی برای تانژانت نداریم.

ایـــن به خاطر این موضوعه که همانطور که می‌دونید tan از زاویه‌ی °۸۵ تا °۹۰ رشد بسیار زیادی رو داره! ضمناً در مسائل مختلف ما نیاز به محاسبه‌ی آن‌ها پیدا نخواهیم کرد. ولی اگه مثل من وسواس دارید که همه‌چیز رو بدونید، تانژانت این زوایا رو براتون نوشته‌ام، هرچند که توصیه نمی‌کنم که اونا رو هم حفظ کنین.

$$\tan ۸۶^\circ = ۱۴/۳$$

$$\tan ۸۷^\circ = ۱۹/۰۸$$

$$\tan ۸۸^\circ = ۲۸/۶۳$$

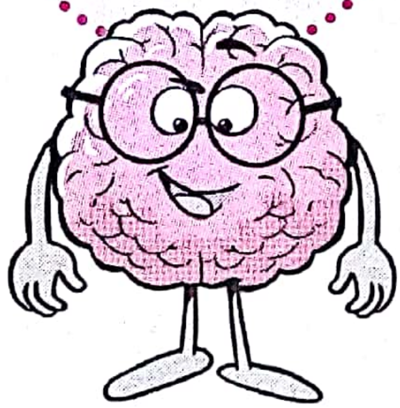
$$\tan ۸۹^\circ = ۵۷/۲۸$$

۱۱ تکنیـــک محاســبه‌ی مقــدار تانژانــت بــرای زوایــای میانـــی: (۵، ۱۵، ۲۵، ۳۵، ... و ۷۵)

زوایای میانی خیلی برای ما دوست‌داشـــتنی هستند، چون که به راحتی می‌تونیم اعداد طلایی اون‌ها رو محاسبه کنیم. فقـــط کافیه که اعـــداد طلایی زوایای اصلـــی‌رو که به اون‌ها نزدیک هستند، با هم جمع کنیم و تقسیم بر ۲ کنیم. برای اینکه گرم بشـــید چندتا مثال رو براتون حل می‌کنم، بعدش هم شما شروع کنید به حل کردن تمرینات.

مثال

$\tan 25^\circ = ?$



قدم اوّل: چون زاویه‌ی 25° وسط زوایای 20° و 30° است پس عدد طلایی اون هم وسط اعداد طلایی زوایای 20° و 30° است.

$$M_{\tan 25^\circ} = \frac{M_{\tan 20^\circ} + M_{\tan 30^\circ}}{2} = \frac{16+27}{2} = 21/5$$

قدم دوم: مقدار زاویه برحسب درجه رو با عدد طلایی جمع می‌کنیم.

$$\alpha + M_{\tan\alpha} = 25 + 21/5 = 46/5$$

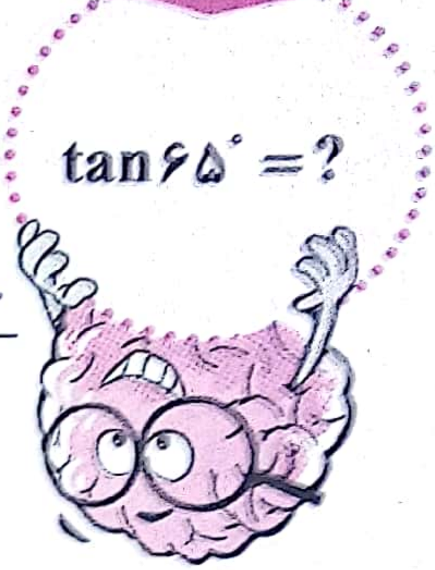
قدم سوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

$$46/5 \longrightarrow 0/465$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \tan 25^\circ = 0/465 & \text{جواب با تخمین مؤلف} \\ \tan 25^\circ = 0/466 & \text{جواب با ماشین‌حساب مهندسی} \end{array}$$

تمام شد! به همین راحتی به جواب رسیدیم.

مثال



قدم اول: عدد طلایی تانژانت را برای زاویه‌ی ۶۵° محاسبه می‌کنیم.

$$M_{\tan ۶۵^\circ} = \frac{M_{\tan ۶۰^\circ} + M_{\tan ۷۰^\circ}}{۲}$$

$$= \frac{۱۱۰ + ۲۰۴}{۲}$$

$$= ۱۵۷$$

قدم دوم: مقدار زاویه برحسب درجه رو با عدد طلایی مربوط به اون جمع می کنیم.

$$\alpha + M_{\tan\alpha} = ۶۵ + ۱۵۷$$
$$= ۲۲۲$$

قدم سوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

$$۲۲۲ \longrightarrow ۲/۲۲$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \tan ۶۵^\circ = ۲/۲۲ \\ \tan ۶۵^\circ = ۲/۱۴ \end{array}$$

جواب با تقریب مؤلف

جواب با ماشین‌حساب مهندسی

همانطـــور که می‌بینید جـــواب ما با جواب ماشین‌حســـاب تنها ۰/۰۸ اختلاف داره یعنی تنها در حدود ۳٪ و **این عالیه!**

تمرینات رو حل کنین تا یه چیز دیگه بهتون بگم.

تمرینات دست‌گرمی

۱ $\tan ۵^\circ =$

۲ $\tan ۱۵^\circ =$

۳ $\tan ۲۵^\circ =$

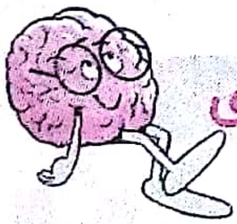
۴ $\tan ۳۵^\circ =$

۵ $\tan ۴۵^\circ =$

۶ $\tan ۵۵^\circ =$

۷ $\tan ۶۵^\circ =$

۸ $\tan ۷۵^\circ =$



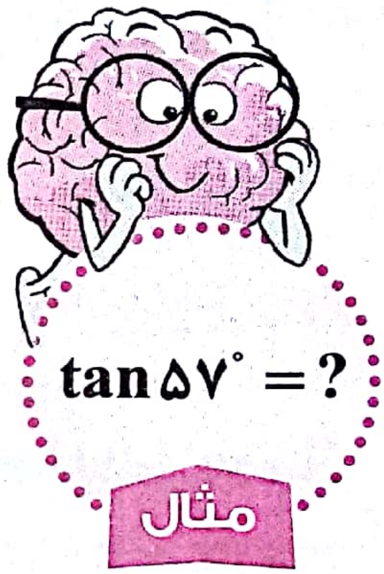
استراحت فکری

قوانین طبیعت به زبان ریاضیات نوشته شده است.

گالیله

استفاده از روش درونیابی خطی برای محاسبه‌ی تانژانت زوایای مختلف:

با روش درونیابی خطی قبلاً آشـــنا شدید، سه‌تا مثال خوب و جامع هـــم در بخش sin ها براتون حل کردم. فقط برای یادآوری مجدد، اینجـــا یه مثال دیگه هم براتون حل می‌کنم. اتفاقاً وقتی صحبت از tan باشه، روش درونیابی خطی بیشتر کاربرد داره.



قـدم اوّل: زاویه ۵۷° بین زوایای ۵۰° و ۶۰° واقع شده.

α	۵۰	۵۷	۶۰
$M_{tan\,\alpha}$	۶۹	?	۱۱۰

+۱۰   +۷   x   +۴۱

تناسب رو تشکیل میدیم.

مقادیری که به عدد طلایی اضافه می‌شود.	مقادیری که به زاویه اضافه می‌شود.
۴۱	۱۰
x=۲۸/۷	۷

پس عدد طلایی رو به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} M_{\tan ۵۷^\circ} &= M_{\tan ۵۰^\circ} + ۲۸/۷ \\ &= ۶۹ + ۲۸/۷ \\ &= ۹۷/۷ \end{aligned}$$

قدم دوم: مقدار زاویه رو با عدد طلایی جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \alpha + M_{\tan\alpha} &= ۵۷ + ۹۷/۷ \\ &= ۱۵۴/۷ \end{aligned}$$

قدم سوم: دو رقم به اعشار می‌رویم.

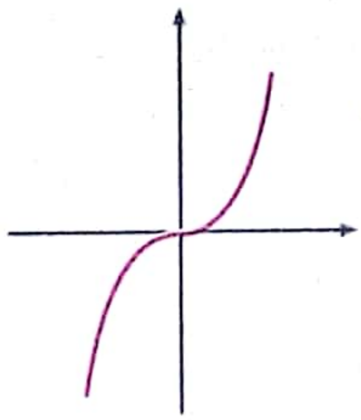
$$۱۵۴/۷ \longrightarrow ۱/۵۴۷$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan ۵۷^\circ = ۱/۵۴۷ & \text{تخمین با روش مؤلف} \\ \tan ۵۷^\circ = ۱/۵۳۹ & \text{تخمین با ماشین‌حساب مهندسی} \end{cases}$$

همانطور که می‌بینید اختلاف جواب ما با جواب ماشین‌حساب مهندسی برابر ۰/۰۰۸ است و این یعنی شاهکار مؤلف!

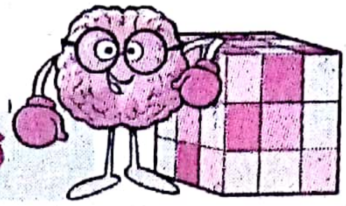
مبارکتون باشه.

تذکر مهم :



خب! تا حالا به قیافه‌ی tan نگاه انداختین؟

همانطور که می‌بینید شیب این تابع برای زوایای نزدیک به زاویه‌ی قائمه، وحشتناک زیـــاده. به خاطر همین چنانچه لازم شـــد، مقـــدار عددی tan را برای زوایای بیش از 70° حســـاب کنید اگر دنبال یه تقریب خیلی خوب و ســـریع می‌گردین از همین روشی که بهتون یاد دادم، اســـتفاده کنیـــد. دقت این روش تقریبی برای زوایای بین 0° تا 60° عالیه و اختلافشون با ماشین‌حساب از یکی، دو درصـــد تجاوز نمی‌کنه. امّا بـــرای زوایای بزرگ‌تر یعنی بیش از 70° ممکن اســـت جوابی که به دســـت میارین حداکثر تا ۱۰٪ با جواب ماشین‌حساب اختلاف داشته باشه که البته برای یک روش تقریبی اونم با این ســـرعت، واقعاً عالیه! امّا اگه به دقت بیشـــتری نیـــاز دارید، همانطور که قبلاً هم گفتم، کافیه $\tan\alpha$ رو به صورت $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ بنویسید و بعد مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را با روش خودمون تقریب بزنید (تقریب ما برای sin و cos فوق‌العاده ســـریع و بسیار دقیقِ) و سپس مقدار $\tan\alpha$ رو به دست بیارید.



تمرینات پرورش فکری

۱) $\tan 11^\circ =$

۲) $\tan 21^\circ =$

۳) $\tan 31^\circ =$

۴) $\tan 41^\circ =$

۵) $\tan 51^\circ =$

۶) $\tan 61^\circ =$

۷) $\tan 71^\circ =$

۸) $\tan 81^\circ =$

۹) $\tan 9^\circ =$

۱۰) $\tan 19^\circ =$

۱۱) $\tan 29^\circ =$

۱۲) $\tan 39^\circ =$

۱۳) $\tan 49^\circ =$

۱۴) $\tan 59^\circ =$

۱۵) $\tan 69^\circ =$

۱۶) $\tan 79^\circ =$

۱۷) $\tan 16^\circ =$

۱۸) $\tan 26^\circ =$

۱۹) $\tan 36^\circ =$

۲۰) $\tan 46^\circ =$

۲۱) $\tan 56^\circ =$

۲۲) $\tan 66^\circ =$

۲۳) $\tan 76^\circ =$

۲۴) $\tan 86^\circ =$

۲۵) $\tan 14^\circ =$

۲۶) $\tan 24^\circ =$

۲۷) $\tan 34^\circ =$

۲۸) $\tan 54^\circ =$

۲۹) $\tan 64^\circ =$

۳۰) $\tan 74^\circ =$

۳۱) $\tan 44^\circ =$

۳۲) $\tan 84^\circ =$

۳۳ $\tan ۱۲^\circ =$

۳۴ $\tan ۲۲^\circ =$

۳۵ $\tan ۳۲^\circ =$

۳۶ $\tan ۴۲^\circ =$

۳۷ $\tan ۵۲^\circ =$

۳۸ $\tan ۶۲^\circ =$

۳۹ $\tan ۷۲^\circ =$

۴۰ $\tan ۸۲^\circ =$

۴۱ $\tan ۸^\circ =$

۴۲ $\tan ۱۸^\circ =$

۴۳ $\tan ۲۸^\circ =$

۴۴ $\tan ۳۸^\circ =$

۴۵ $\tan ۴۸^\circ =$

۴۶ $\tan ۵۸^\circ =$

۴۷ $\tan ۶۸^\circ =$

۴۸ $\tan ۷۸^\circ =$

۴۹ $\tan ۱۷^\circ =$

۵۰ $\tan ۲۷^\circ =$

۵۱ $\tan ۳۷^\circ =$

۵۲ $\tan ۴۷^\circ =$

۵۳ $\tan ۵۷^\circ =$

۵۴ $\tan ۶۷^\circ =$

۵۵ $\tan ۷۷^\circ =$

۵۶ $\tan ۸۷^\circ =$

۵۷ $\tan ۱۳^\circ =$

۵۸ $\tan ۲۳^\circ =$

۵۹ $\tan ۳۳^\circ =$

۶۰ $\tan ۴۳^\circ =$

۶۱ $\tan ۵۳^\circ =$

۶۲ $\tan ۶۳^\circ =$

۶۳ $\tan ۷۳^\circ =$

۶۴ $\tan ۸۳^\circ =$

۶۵ tan ۸۹° =

۶۶ tan ۸۱° =

۶۷ tan ۸۵° =

۶۸ tan ۸۷° =

۶۹ tan ۸۳° =

۷۰ tan ۸۸° =

۷۱ tan ۸۲° =

۷۲ tan ۸۴° =

۷۳ tan ۲۹° =

۷۴ tan ۲۱° =

۷۵ tan ۲۵° =

۷۶ tan ۲۷° =

۷۷ tan ۲۳° =

۷۸ tan ۲۸° =

۷۹ tan ۲۲° =

۸۰ tan ۲۴° =

۸۱ tan ۳۹° =

۸۲ tan ۳۱° =

۸۳ tan ۳۷° =

۸۴ tan ۳۵° =

۸۵ tan ۳۴° =

۸۶ tan ۳۲° =

۸۷ tan ۳۸° =

۸۸ tan ۳۳° =

۸۹ tan ۴۱° =

۹۰ tan ۴۹° =

۹۱ tan ۴۵° =

۹۲ tan ۴۷° =

۹۳ tan ۴۴° =

۹۴ tan ۴۲° =

۹۵ tan ۴۸° =

۹۶ tan ۴۳° =

۹۷ tan ۶۱° =

۹۸ tan ۶۹° =

۹۹ tan ۶۵° =

۱۰۰ tan ۶۷° =

۱۰۱ tan ۶۴° =

۱۰۲ tan ۶۲° =

۱۰۳ tan ۶۸° =

۱۰۴ tan ۶۳° =

۱۰۵ tan ۷۱° =

۱۰۶ tan ۷۹° =

۱۰۷ tan ۷۵° =

۱۰۸ tan ۷۷° =

۱۰۹ tan ۷۴° =

۱۱۰ tan ۷۲° =

۱۱۱ tan ۷۸° =

۱۱۲ tan ۷۳° =

۱۱۳ tan ۲° =

۱۱۴ tan ۹° =

۱۱۵ tan ۵° =

۱۱۶ tan ۷° =

۱۱۷ tan ۴° =

۱۱۸ tan ۸° =

۱۱۹ tan ۳° =

۱۲۰ tan ۶° =

۱۲۱ tan ۱۱/۵° =

۱۲۲ tan ۲۶/۵° =

۱۲۳ tan ۳۴/۵° =

۱۲۴ tan ۴۶/۵° =

۱۲۵ tan ۵۱/۵° =

۱۲۶ tan ۶۹/۵° =

۱۲۷ tan ۲۲/۵° =

۱۲۸ tan ۷۹/۵° =

۱۲ تکنیک محاسبه‌ی مقادیر مختلف تابع تانژانت زوایـای منفـی و زوایـای بیـش از ۹۰ درجه:

از چندتـا فرمـول نازنیـن می‌تونیم برای محاسـبه‌ی tan زوایای منفی و زوایای بیش از ۹۰° استفاده کنیم.

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

فرمول‌ها برحسب درجه	فرمول‌ها برحسب رادیان
$\tan(۱۸۰-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$
$\tan(۱۸۰+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

مثال ۱ $\tan(-۵۰^\circ) = ?$

حل: $\tan(-۵۰^\circ) = -\tan ۵۰^\circ = -۱/۱۹$

مثال ۲ $\tan(۱۱۰^\circ) = ?$

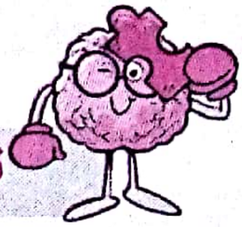
حل: $\tan(۱۱۰^\circ) = \tan(۱۸۰-۷۰^\circ) = \tan(-۷۰^\circ) =$

$-\tan ۷۰^\circ = -۲/۷۴$

مثال ۳ $\tan(۲۰۰^\circ) = ?$

$\tan ۲۰۰^\circ = \tan(۱۸۰+۲۰) = \tan(۲۰) = ۰/۳۶$

تمام شد! موفق باشید.



تمرینات پرورش فکری

۱ $\tan ۱۷۰^\circ =$

۲ $\tan ۱۶۰^\circ =$

۳ $\tan ۱۴۰^\circ =$

۴ $\tan ۱۳۰^\circ =$

۵ $\tan ۱۱۵^\circ =$

۶ $\tan ۱۸۰^\circ =$

۷ $\tan ۱۵۰^\circ =$

۸ $\tan ۱۰۰^\circ =$

۹ $\tan ۱۷۵^\circ =$

۱۰ $\tan ۱۶۵^\circ =$

۱۱ $\tan ۱۴۵^\circ =$

۱۲ $\tan ۱۳۵^\circ =$

۱۳ $\tan ۱۲۵^\circ =$

۱۴ $\tan ۱۱۵^\circ =$

۱۵ $\tan ۱۰۵^\circ =$

۱۶ $\tan ۱۵۵^\circ =$

۱۷ $\tan ۱۹۰^\circ =$

۱۸ $\tan ۲۰۰^\circ =$

۱۹ $\tan ۲۱۰^\circ =$

۲۰ $\tan ۲۲۰^\circ =$

۲۱ $\tan ۲۳۰^\circ =$

۲۲ $\tan ۲۴۰^\circ =$

۲۳ $\tan ۲۵۰^\circ =$

۲۴ $\tan ۲۶۰^\circ =$

۲۵ tan ۲۶۵° =

۲۶ tan ۲۵۵° =

۲۷ tan ۲۴۵° =

۲۸ tan ۲۳۵° =

۲۹ tan ۲۲۵° =

۳۰ tan ۲۱۵° =

۳۱ tan ۲۰۵° =

۳۲ tan ۱۹۵° =

۳۳ tan ۳۵۰° =

۳۴ tan ۳۴۰° =

۳۵ tan ۳۳۰° =

۳۶ tan ۳۲۰° =

۳۷ tan ۳۱۰° =

۳۸ tan ۳۰۰° =

۳۹ tan ۲۹۰° =

۴۰ tan ۲۸۰° =

۴۱ tan ۳۵۵° =

۴۲ tan ۳۴۵° =

۴۳ tan ۳۳۵° =

۴۴ tan ۳۲۵° =

۴۵ tan ۳۱۵° =

۴۶ tan ۳۰۵° =

۴۷ tan ۲۹۵° =

۴۸ tan ۲۸۵° =

۴۹ tan ۳۷۰° =

۵۰ tan ۳۸۰° =

۵۱ tan ۳۹۰° =

۵۲ tan ۴۰۰° =

۵۳ tan ۴۱۰° =

۵۴ tan ۴۲۰° =

۵۵ tan ۴۳۰° =

۵۶ tan ۴۴۰° =

۵۷ $\tan ۳۷۵^\circ =$

۵۸ $\tan ۳۸۵^\circ =$

۵۹ $\tan ۳۹۵^\circ =$

۶۰ $\tan ۴۰۵^\circ =$

۶۱ $\tan ۴۱۵^\circ =$

۶۲ $\tan ۴۲۵^\circ =$

۶۳ $\tan ۴۳۵^\circ =$

۶۴ $\tan ۴۴۵^\circ =$

■ محاسبه‌ی عبارت‌های مثلثاتی:

۶۵ $\tan ۱۰^\circ \times \tan ۲۰^\circ =$

۶۶ $\tan ۳۰^\circ \times \tan ۷۰^\circ =$

۶۷ $\tan ۴۰^\circ \times \tan ۵۰^\circ =$

۶۸ $\tan ۸۰^\circ \times \tan ۲۰^\circ =$

۶۹ $\tan ۴۰^\circ \times \tan ۶۰^\circ =$

۷۰ $\tan ۱۰^\circ \times \tan ۵۰^\circ =$

۷۱ $\tan ۸۰^\circ \times \tan ۸۰^\circ =$

۷۲ $\tan^{۲} ۴۰^\circ =$

۷۳ $\tan ۱۵^\circ + \tan ۳۵^\circ =$

۷۴ $\tan ۱۰^\circ + \tan ۴۰^\circ =$

۷۵ $\tan ۲۰^\circ + \tan ۵۰^\circ =$

۷۶ $\tan ۴۰^\circ + \tan ۵۰^\circ =$

۷۷ $\tan ۸۰^\circ + \tan ۷۰^\circ =$

۷۸ $\tan ۴۰^\circ + \tan ۴۰^\circ =$

۷۹ $\tan ۵۵^\circ + \tan ۷۵^\circ =$

۸۰ $\tan ۲۲/۵^\circ + \tan ۶۷/۵^\circ =$

۸۱ $\tan ۳۰^\circ - \tan ۱۰^\circ =$

۸۲ $\tan ۶۵^\circ - \tan ۳۵^\circ =$

۸۳ $\tan ۴۰^\circ - \tan ۲۰^\circ =$

۸۴ $\tan ۷۰^\circ + \tan ۵۰^\circ - \tan ۱۰^\circ =$

۸۵ $\tan ۲۰^\circ + \tan ۴۰^\circ + \tan ۸۰^\circ =$

۸۶ $\tan ۲۵^\circ - \tan ۱۵^\circ =$

۸۷ $\tan ۸۵^\circ - \tan ۳۵^\circ =$

۸۸ $\tan ۶۰^\circ - \tan ۵۰^\circ =$

۸۹ $\dfrac{\tan ۸۰^\circ}{\tan ۱۰^\circ} =$

۹۰ $\dfrac{\tan ۶۰^\circ}{\tan ۲۰^\circ} =$

۹۱ $\dfrac{\tan ۷۰^\circ}{\tan ۱۵^\circ} =$

۹۲ $\frac{\tan ۴۵^\circ}{\tan ۵۱^\circ} =$

۹۳ $\frac{۱}{\tan ۴۰^\circ} =$

۹۴ $\frac{۱}{\tan ۸۰^\circ} =$

۹۵ $\frac{\tan ۳۰^\circ + \tan ۷^\circ}{\tan ۳۷^\circ} =$

۹۶ $\frac{\tan ۲۰^\circ + \tan ۳۳^\circ}{\tan ۵۳^\circ} =$

۹۷ $\tan ۷۵^\circ \times \tan ۱۵^\circ =$

۹۸ $\tan ۱۰^\circ + \tan ۲۰^\circ + \tan ۳۰^\circ =$

۹۹ $(\tan ۴۰^\circ + \tan ۲۰^\circ)(\tan ۵۰^\circ - \tan ۱۰^\circ) =$

۱۰۰ $\tan ۴۰^\circ + \tan ۵۰^\circ + \tan ۶۰^\circ =$

۱۰۱ $\tan ۷۰^\circ + \tan ۸۰^\circ + \tan ۴۰^\circ =$

۱۰۲ $\frac{(\tan^۲ ۲۰^\circ + \tan^۲ ۸۰^\circ)}{\tan ۳۷^\circ} =$

۱۰۳ $\dfrac{\tan 80^\circ + \tan 60^\circ + \tan 40^\circ}{\tan 20^\circ} =$

۱۰۴ $\dfrac{\tan^2 80^\circ - \tan^2 35^\circ}{\tan^2 30^\circ} =$

۱۰۵ $\tan 100^\circ + \tan 200^\circ =$

۱۰۶ $\tan 270^\circ + \tan 280^\circ + \tan 290^\circ =$

۱۰۷ $\tan 300^\circ + \tan 400^\circ =$

۱۰۸ $\tan 120^\circ + \tan 160^\circ + \tan 200^\circ + \tan 240^\circ =$

۱۰۹ $\tan 150^\circ + \tan 200^\circ =$

۱۱۰ $\tan 110^\circ + \tan 210^\circ + \tan 310^\circ + \tan 410^\circ =$

۱۱۱ $\tan 110^\circ + \tan 130^\circ + \tan 150^\circ =$

۱۱۲ $(\tan 315^\circ + \tan 345^\circ) - (\tan 215^\circ - \tan 245^\circ) =$

فصل چهارم

۱۳ تکنیک تخمین مقادیر مختلف تابع محترم کتانژانت وقتی که زاویه بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد:

الان که ما می‌تونیم tan هر زاویه‌ای رو خیلی سریع محاسبه کنیم، به راحتی قادر خواهیم بود که با استفاده از یک فرمول نازنین، cot هر زاویه‌ای رو هم به همون سرعت محاسبه کنیم.

$$\alpha+\beta=۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases}\tan\alpha=\cot\beta\\ \cot\alpha=\tan\beta\end{cases}$$

این فرمول داره میگه؛ اگه دوتا زاویه متمم همدیگه باشند، tan یکی برابر cot اون یکیه! با استفاده از این فرمول به راحتی می‌تونیم cot هر زاویه‌ای رو هم حساب کنیم. تازه یه فرمول دیگه هم داریم و اون اینه که $\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}$. ضمناً از رابطه‌ی $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ هم می‌شه استفاده کرد.

مثال ۱ $\cot ۲۰^\circ=?$

حل: $\cot ۲۰^\circ=\cot(۹۰^\circ-۷۰^\circ)=\tan ۷۰^\circ=۲/۷۴$

مثال ۲ $\cot ۸۰^\circ=?$

حل: $\cot ۸۰^\circ=\cot(۹۰-۱۰)=\tan ۱۰^\circ=۰/۱۷$

یه خبر خوب: اگرتا اینجا تمرینات کتاب رو کامل انجام دادید، دیگه الان احتیاج به تمرین جدیدی ندارید. موفق و پیروز باشید.

فصل پنجم

۱۴ تکنیک تخمین مقادیر مختلف توابع معکوس مثلثاتی (آرک‌ها)

یه موضوعی که برای ریاضیدان‌های فصولِ قبل از ما پیش اومد این بود که: الان که یاد گرفته‌ایم مقادیر توابع مثلثاتی رو برای زوایای مختلف حساب کنیم، آیا می‌تونیم عکس این کار رو هم انجام بدیم یا نه؟ (بیکار بودن، ببین به چه چیزایی گیر می‌دادن!)

نمونه‌ی سؤالش اینجوری براشون مطرح شد:

«آیا می‌توانید زاویه‌ای را نام ببرید که سینوس آن برابر $\frac{1}{2}$ باشد؟»

چون ریاضیدان‌ها اساساً از نوشتن زیاد خوششون نمی‌اومد برای همین اومدن از یک علامت استفاده کردن تا سؤال بالا رو نمایش بِدن و اون علامت، واژه‌ی Arc بود (یعنی کمان).

با این علامت، سؤال «زاویه‌ای را نام ببرید که سینوس آن برابر $\frac{1}{2}$ باشد؟» را به صورت $\text{Arcsin}(\frac{1}{2}) = ?$ نوشتند و کلی هم بابت این موضوع خوشحال بودن.

خوب تقریباً هر دانش‌آموز نخبه‌ای که اون زمان با این سؤال مواجه می‌شد (و مغزش حداقل اندازه‌ی یک جلبک، قابلیت تجزیه و تحلیل داشت!) می‌تونست به راحتی به اون پاسخ بده. بعله زاویه‌ی 30°، زاویه‌ای بود که سینوس اون برابر $\frac{1}{2}$ بود. لذا دانش‌آموزان و ریاضیدانان با خوبی و خوشی به این گونه

سؤالات پاسخ می‌دادن.

$$\mathrm{Arcsin}(\frac{1}{2}) = 30^\circ$$

یا

$$\mathrm{Arcsin}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$$

اما بودن دانشـــجویان و ریاضیدانان سیریشی که سریعاً به این موضوع واکنش نشـــون دادن. اون‌ها گفتن که آهای گاگول‌ها! فقط زاویه‌ی 30° نیســـت که sinاش برابر $\frac{1}{2}$ می‌شـــه، خیلی زاویه‌های دیگه هم هستن. در واقع بی‌نهایت زاویه هستن که sin اون‌ها برابر $\frac{1}{2}$ می‌شه.

گروه اوّل همین‌جوری انگشت به دهن داشتن به این گروه دوم نگاه می‌کردن! گفتن خب یه چندتاشون رو نام ببرین.

گروه دوم هم با نهایت خشونت و بدون ترحم، شروع کردن به نام بردن.

پاسخ‌ها $30^\circ, 390^\circ, 750^\circ, \ldots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

و گفتـــن به k هر عدد صحیح مثبت یـــا منفی که بخواین رو می‌تونین بدین $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$

گاگول‌هـــای گروه اول دیدن کـــه آره بابا این گروه دومی‌ها حواسشـــون جمع‌تر بوده! گروه دومی‌ها خوشحال از این موضوع با فخر تمام شروع کردن به گفتن این موضوع که:

تازه مـــا می‌تونیم بی‌نهایـــت زاویه‌ی دیگه هم نـــام ببریم که سینوس اون‌ها برابر $\frac{1}{2}$ باشه!

پاسخ‌ها $510^\circ, 870^\circ, \ldots, 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

و گفتن به k هر عدد صحیح مثبت یا منفی که خواستین، می‌تونین بدین! از اون به بعد ریاضیدان‌ها به دو دسته تقسیم شدن.

ریاضیدانان گاگول و گاگول‌ترها!

ریاضیدانان گاگول به سؤال «سینوس چه زوایایی برابر $\frac{1}{2}$ است»، اینجوری پاسخ می‌دادن:

$$\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{1}{2}\right) = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad , \quad 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

و ریاضیدانان گاگول‌تر هم گفتن که آقاجان ما از بین زوایایی که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ هستش، فقط اون زاویه کوچیکه‌ی مثبتِ مدنظرمون هستش و برای اینکه اعلام استقلال بکنن به جای Arc از arc استفاده کردن!

اون‌ها سؤال بالا رو اینجوری می‌نوشتن و جواب می‌دادن:

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

به عنوان پاورقی

در بسیاری از کتب مرجع خارجی از Arc برای نشان دادن همه‌ی زوایا و از arc برای نشان دادن یک جواب استفاده می‌شود. البته در بسیاری از کتاب‌ها هم فرقی بین Arc و arc قائل نیستند و منظورشان از هر دو مورد، نشان دادن جواب یکتا است.

به هر حال دردسرتون ندم. این وسط یک گروه سومی هم پیدا شدن که نام «**گاگول تمام**» رو به خودشون اختصاص دادن! (*چون در واقع این گروه سوم یه جورایی کار رو تموم کردن!*) اون‌ها گفتن آقا می‌دونیم که ما سه تا تابع اصلی مثلثاتی داریم sin، cos، tan و سه تا هم تابع فرعی مثلثاتی داریم sec و csec و cot. چطوره بیایم برای اینا توابع معکوس مثلثاتی رو تعریف کنیم!

آقا هنوز حرف اینا تموم نشده بود که همه‌ی ریاضیدان‌ها شروع کردن عین میمون کیت کت خورده، هرهر به اینا خندیدن!

گاگول تمام‌ها گفتن چیه بابا! به چی می‌خندین؟

ریاضیدان‌ها هم از شدت خنده *داشتن آب و روغن قاطی می‌کردن!* گاگول تمام‌ها هم با حالت افسردگی داشتن به اون‌ها نگاه می‌کردن. خلاصه بعد از چند هفته که خنده‌ی این‌ها تموم شد ... به گاگول تمام‌ها اینجوری گفتن: «ببین دلبندم! توابع معکوس برای توابعی تعریف

می‌شه که معکوس‌پذیر باشن!» توابع معکوس‌پذیر، توابعی هستند که یک‌به‌یک باشن! یعنی به ازای هر x مجزاء که متعلق به دامنه‌ی اون‌هاست، یک جواب (خروجی) منحصربه‌فرد ارائه بِدن.

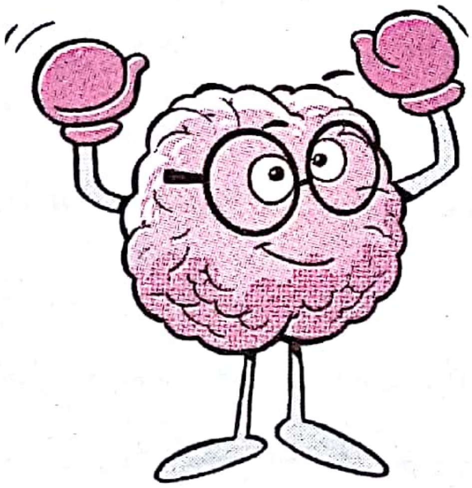
توابع مثلثاتی که توابع متناوب هستن، به ازای یک ورودی، بی‌نهایت خروجی دارن، (مثلاً برای $\sin(\alpha)=\frac{1}{2}$ شما بی‌نهایت جواب برای زاویه‌ی α خواهی داشت.

$\alpha=\frac{\pi}{6}, \pi=2k\pi+\frac{\pi}{6}, \alpha=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$ پس توابع مثلثاتی چون یک‌به‌یک نیستن، نمی‌تونن معکوسی هم داشته باشن! گاگول تمام‌ها با شنیدن این موضوع خیلی عصبانی شدن. گفتن که آخه شما نمی‌زارین حرف ما تموم بشه، ما یه حرفی زدیم، هنوز تموم نشده *عینْ آفتاب‌پرستِ، آفتاب دیده شْروع کردینْ به خْندیدنْ*. ما برای این هم، فکری اندیشیده بودیم و اون این بود که توابع مثلثاتی رو محدود کنیم به بازه‌هایی که در اون بازه‌ها این توابع یک‌به‌یک هستند و بعد از اون براشون تابع معکوس تعریف کنیم.

و اینگونه شد که گاگول تمام‌ها توابع معکوس مثلثاتی رو با محدود کردن دامنه‌ی توابع مثلثاتی، تعریف کردن.

توابع معکوس مثلثاتی رو با دو روش نمایش میدن. یعنی مثلاً تابع معکوس sin رو با $\sin^{-1}x$ و در برخی از کتاب‌ها با arc sinx نمایش میدن.

$0 \le \sec^{-1}x \le \pi \,,\ \ne \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}x \le \frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2} \le \csc^{-1}x \le \frac{\pi}{2} \,,\ \ne 0$	$0 \le \cos^{-1}x \le \pi$
$0 < \cot^{-1}x < \pi$	$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \frac{\pi}{2}$



پاورقی

در بسیاری از کتاب‌های مرجع، تفاوتی بین $\sin^{-1}x, \mathrm{Arc}\sin x, \arcsin x$ قائل نمی‌شوند و منظور از همه‌ی آن‌ها معکوس تابع مثلثاتی با حفظ شرایط یک‌به‌یک بودن است و همان‌طور که قبلاً هم گفتم در بعضی کتاب‌های مرجع، منظور از $\mathrm{Arc}\sin x$ تمام زوایایی است که سینوس آن‌ها برابر x است.

(این موضوع به کلیت بحث، با در نظر گرفتن شرایط، خللی وارد نمی‌کند.)

امّا: $-\frac{\pi}{۲} \le \sin^{-۱}x \le \frac{\pi}{۲}$ چی‌چی میگه؟

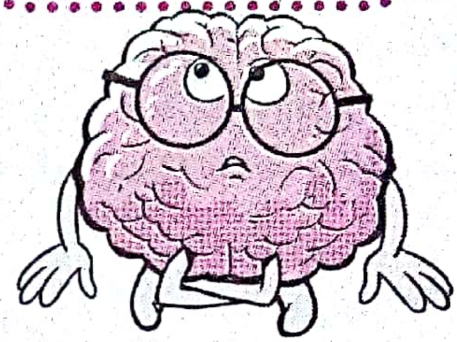
این زبون بسته داره میگه که برای پیدا کردن زاویه‌ی مربوط به تابع معکوس سینوس، فقط بین زوایایی که بین $+۹۰$ تا -۹۰° هستند را بگردید و پیدا کنید. یعنی مثلاً وقتی می‌خواهیم $\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})$ رو پیدا کنیم، جواب درست از بین همه‌ی زاویه‌هایی که مقدار سینوس‌شان برابر $\frac{۱}{۲}$ است، فقط زاویه‌ای است که بین $+۹۰^\circ$ تا -۹۰° است.

زوایایی که $\ldots, ۳۹۰^\circ, +۳۰^\circ, -۱۵۰^\circ, -۳۳۰^\circ, \ldots$: سینوس‌شان برابر $\frac{۱}{۲}$ است. از بین بی‌نهایت زاویه‌ی موجود، زاویه‌ی منحصربفرد $+۳۰^\circ$ که بین $+۹۰^\circ, -۹۰^\circ$ است را به عنوان جواب $\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})$ انتخاب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \sin^{-۱}(\frac{۱}{۲}) = ۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}$$

مثال

$$\circ \leq \cos^{-1}(x) \leq \pi$$



داره میگه که برای پیدا کردن زاویه‌ی تابع معکوس کســینوس، عین مرغ پرکنده دنبال همه‌ی زوایا نباشید و فقط دنبال زاویه‌ای باشــید که بین $\circ^\circ$ تا $۱۸\circ^\circ$ است.

مثلاً $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$ برابر ۴۵° است.

$$\Rightarrow \cos^{-1}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = +\frac{\pi}{۴} = +۴۵^\circ$$

و بقیه‌ی روابط فوق هم به همین شکل.

حالا! مأموریت غیر ممکن برای من و شما ممکن می‌شود!

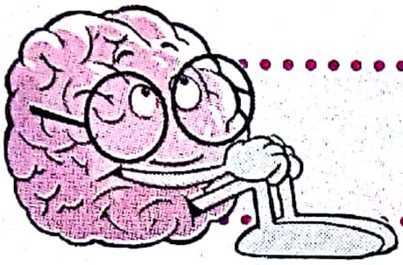
مــا که الان می‌تونیــم مقادیر توابع مثلثاتی رو بــرای همه‌ی زوایا پیــدا کنیم به راحتی هم می‌تونیم مقادیر مربوط به توابع معکوس مثلثاتی رو هم با دقت بسیاربسیار خوبی تخمین بزنیم و حالش رو ببریم. در این موارد هم می‌تونیم از ۲ روش استفاده کنیم:

روش اوّل: استفاده از تقریب چشمی و آزمون و خطا

روش دوم: استفاده از درون‌یابی خطی

در ادامه هر دو روش رو براتون توضیح میدم و مثال حل می‌کنم.

مثال



$\alpha=\sin^{-1}(۰/۶)$، مقدار α را بیابید.

در این مثال ما به‌دنبال این هستیم که زاویه‌ی αای رو پیدا کنیم که مقدار عددی $\sin\alpha = ۰/۶$ بشه.

(با این شرط که $-۹۰^\circ \leq \alpha \leq +۹۰^\circ$ باشد.)

حل: با روش اوّل (تقریب چشمی):

قدم اول: سریعاً در ذهنمون مقادیر سینوس زوایای اصلی رو مرور می‌کنیم. (اینکار برای ما خیلی آسونه.)

$\sin ۳۰^\circ = ۰/۵ \,,\, \sin ۴۰^\circ = ۰/۶۴$

قدم دوم: با توجه به مقادیر سینوس زاویه‌های ۳۰° و ۴۰°، متوجه می‌شیم که این زاویه حتماً بین ۳۰° و ۴۰° است و مقدار آن به ۴۰° هم نزدیک‌تره.

قدم سوم: مقدار زاویه‌ی میانی بین ۳۰° و ۴۰° رو به سرعت در ذهنمون محاسبه می‌کنیم.

$\sin ۳۵^\circ = ۰/۵۷$

قدم چهارم: خیلی نزدیک شدیم $\sin ۳۵^\circ = ۰/۵۷$ و $\sin ۴۰^\circ = ۰/۶۴$ به نظر میاد که زاویه‌ای که sin آن برابر ۰/۶ باشد، یه جورایی وسط ۳۵° و ۴۰° است. پس زاویه‌ی $۳۷/۵^\circ$ باید

برابر جواب باشد. ما به جواب رسیدیم!

$\sin^{-1}(0/6) = 37/5°$:تخمین سریع ما به روش تقریب چشمی MBM

$\sin^{-1}(0/6) = 36/86$:جواب با ماشین‌حساب مهندسی

$0/64°$ = اختلاف با ماشین‌حساب به روش تقریب چشمی

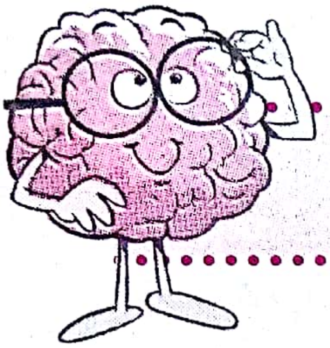
$1/0$٪ = درصد خطا

بعله! اختلاف ما با ماشین‌حساب مهندسی تنها ۱ صدم درصد است!

نکته‌ای برای رسیدن به جواب دقیق‌تر با این روش:

۱ معمولاً در تست‌ها پاسخ بین چهار گزینه می‌باشد که به راحتی ما می‌توانیم گزینه‌ای که به پاسخ سریع ما نزدیک‌تر است را انتخاب کنیم و مطمئن باشیم که ۱۰۰٪ کارمان را درست انجام داده‌ایم.

۲ در مواردی که قرار نیست بین گزینه‌ها زاویه‌ای را انتخاب کنید، اگر مبتلا به وسواس فکری هستید! می‌توانید زوایایی بیشتر و نزدیک‌تر به جواب را امتحان کنید.



مثال

مقدار $\alpha=\sin^{-۱}(۰/۳)$ را پیدا کنید.

این مثال رو با استفاده از درون‌یابی خطی براتون حل می‌کنم.

قدم اول: سریع مقادیر sin زوایای اصلی رو در ذهنمون تخمین می‌زنیم $\sin۱۰^\circ=۰/۱۷$ و $\sin۲۰^\circ=۰/۳۴$. پیداش کردیم! زاویه‌ی ما حتماً بین ۱۰° تا ۲۰° است.

قدم دوم: استفاده از درون‌یابی خطی:

$$\left.\begin{array}{l}\sin^{-۱}(۰/۱۷)=۱۰^\circ\\ \sin^{-۱}(۰/۳۴)=۲۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \sin^{-۱}(۰/۳)=\alpha$$

جدول تناسب زیر رو تشکیل میدیم.

به سینوس اضافه می‌شود.	به زاویه اضافه می‌شود.
$۰/۱۷$	۱۰°
$(۰/۳-۰/۱۷=)۰/۱۳$	x

$$\Rightarrow x=\frac{۰/۱۳\times۱۰}{۰/۱۷}=\frac{۱۳۰}{۱۷}\simeq۷^\circ$$

تمام شد. ما به جواب رسیدیم. $۱۰+۷=۱۷^\circ$

(جواب با روش درون‌یابی خطی MBM) $\sin^{-1}(0/3)=17^\circ$

(جواب با ماشین‌حساب مهندسی) $\sin^{-1}(0/3)=17/4^\circ$

اختلاف $=17/4^\circ-17^\circ=0/4^\circ$

درصد خطا $=\%0/02$

اختلاف فقط ۲ صدم درصد است!

حالا قادر هستیم با استفاده از این روش، بسیاری از تست‌های کنکور، که مخصوصاً در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه طراحان کنکور قرار گرفته رو به سادگی حل کنیم. (در بخش کاربرد مثلثات سریع قسمت کنکور، نمونه‌ی این تست‌ها رو براتون حل کردم تا حسابی ازشون لذت ببرین:)

لامصب عین دور زدن تحریم‌ها می‌مونه! خیلی حال میده!

ضمناً این فرمول‌ها رو هم بلد باشین به دردتون می‌خوره.

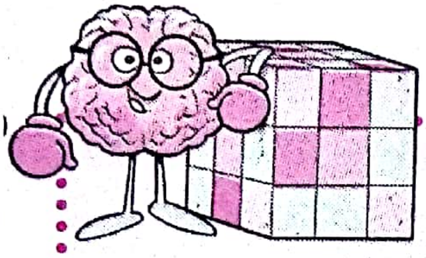
$$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}(x)$$

$$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}(x)$$

$$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}(x)$$

$$\cot^{-1}(-x)=\pi-\cot^{-1}(x)$$

فصل ششم



۱۵ تکنیک حل معادلات مثلثاتی:

در آمـــوزش مثلثات به روش کلاســـیک، یاد می‌گیریم تا انواع گوناگونی از معادلات مثلثاتی را حل کنیم، که اتفاقاً خیلی زیبا و سرگرم‌کننده هستن. من خودم شخصاً عاشق روش‌های حل معادلات مثلثاتی با روش کلاســـیک هستم (به جان خودم راست میگم!) البته بسیاری از معادلات مثلثاتی با روش‌های کلاسیک قابل حل نیســـتند و بعضاً با روش‌های بسیار پیچیده‌ای قابل حل هســـتند که در دانشگاه‌ها در رشته‌های ریاضی و برخی از رشته‌های فنی، مورد بررسی قرار می‌گیرند و روش‌های تقریبی متنوعی برای حل آن‌ها در نظر گرفته می‌شود.

شاید براتون جالب باشه، در درسی به نام محاسبات عددی در دانشـــگاه با روش‌های تقریبی جالبی برای حل معادلات آشنا می‌شیم که بنیان و اساس همه‌ی این روش‌ها بر پایه‌ی آزمون و خطا بنا شده است. یعنی در روش‌هایی که بشر تا امروز برای حل معادلات به کار گرفته، بزرگ‌ترین نوابغ، تمامی روش‌هایی که ارائه کرده‌اند به این صورت بوده که این گام‌ها را برداریم:

- **قدم اول:** حدس بزنیم و آزمایش کنیم.
- **قدم دوم:** حدسمان را بهتر کنیم و مجدداً آزمایش کنیم.
- **قدم سـوم:** آنقدر به حدس و آزمایش ادامه دهیم تا به جواب قابل قبول با تقریب خوب، دست پیدا کنیم.

روش حل تمامی ریاضیدانان برای حل معادلات پیچیده و غیر کلاسـیک و بعضاً کلاسیک، دقیقاً بر پایه‌ای که برای شما نام بردم بنا شده است. روش کار در تمامی روش‌ها یکی است امّا تفاوت اساسـی و عمده در گام‌های دوم و سوم است. یعنی هر کدام برای رسیدن به جواب و زدن حدس‌های بهتر، روش‌های خـود را ارائه داده‌اند که هـر کدام از آن روش‌ها نقاط مثبت و منفی مربوط به خود را هم داشتند.

حالا سکته نکنید!

معـادلات مثلثاتی که تا پایان مقطع دبیرسـتان بـا اون‌ها مواجه می‌شـین، غالباً از نوع معادلات کلاسـیک هسـتند. یعنی با انجام عملیات درست و راه‌کارهایی که یاد می‌گیرید، می‌تونید بعد از ساده کردن در نهایت خودتون رو به یکی از حالت‌های زیر برسونید.

معادلات مثلثاتی که باهاش مواجه می‌شین:

$$\xrightarrow{\text{ساده می‌کنید تا}} \begin{cases} ۱)\ \sin x = \text{مقدار معلوم} \\ ۲)\ \cos x = \text{مقدار معلوم} \\ ۳)\ \tan x = \text{مقدار معلوم} \\ ۴)\ \cot x = \text{مقدار معلوم} \end{cases}$$

وقتی بعد از ساده کردن و کلنجار رفتن، به یکی از ۴ مورد بالا رسیدین، در واقع معادله حل شده ولی برای رسیدن به همه‌ی جواب‌های ممکن برای معادله، می‌تونید از نکته‌های زیر هم استفاده کنید.

۱ $\sin x = \sin(a)$ در اینجا x مجهول اســت و مقدار a معلوم اســت.

جواب‌های معادله : $\begin{cases} ۱)\ x = a & \text{(جواب محرز)} \\ ۲)\ x = ۲k\pi + a \\ ۳)\ x = ۲k\pi + \pi - a \end{cases}$

۲ $\cos x = \cos(a)$ در اینجا x مجهول است و مقدار a معلوم است.

جواب‌های معادله : $\begin{cases} ۱)\ x = a & \text{(جواب محرز)} \\ ۲)\ x = ۲k\pi + a \\ ۳)\ x = ۲k\pi - a \end{cases}$

۳ $\tan x = \tan(a)$ در اینجا x مجهول اســت و مقدار a معلوم است.

جواب‌های معادله : $\begin{cases} ۱)\ x = a & \text{(جواب محرز)} \\ ۲)\ x = k\pi + a \end{cases}$

در اینجا x مجهول است و مقدار a معلوم است.

۴ $\cot x = \cot(a)$

جواب‌های معادله : $\begin{cases} ۱)\ x = a & \text{(جواب محرز)} \\ ۲)\ x = k\pi + a \end{cases}$

حل تست مربوط به معادلات مثلثاتی:

بسیاری از تست‌های مربوط به معادلات مثلثاتی را می‌توانیم با استفاده از قدرت تخمین سریع توابع مثلثاتی حل کنیم. در این زمینه ۲ تیپ از تست‌ها برای ما خیلی ساده، قابل حل هستند که روش را به شما می‌گویم.

تست‌های تیپ ۱: در این تست‌ها یک معادله‌ی مثلثاتی داده می‌شود و از شما خواسته می‌شود که جواب محرز آن را بیابید و یا اینکه سؤال می‌شود از بین ۴ گزینه‌ی زیر، کدام جواب معادله است.
در پاسخ هم ۴ زاویه به شما داده‌اند.

حل: گزینه‌ها را تک‌تک داخل معادله قرار دهید. هر کدام که معادله را به تساوی درست تبدیل کرد، جواب خواهد بود.

تست‌های تیپ ۲: در این تست‌ها یک معادله‌ی مثلثاتی داده شده است و از شما پرسیده شده؛ کدام‌یک از دسته جواب‌های زیر، جواب معادله هستند.

قدم اول: در این تست‌ها ابتدا به kی داده شده در گزینه‌ها مقدار مناسبی دهید، تا هر گزینه، پاسخ منحصربه‌فردی به شما بدهد. (یعنی جواب ۲ تا گزینه یکسان نباشد.)

قدم دوم: گزینه‌ها را در معادله‌ی داده شده، قرار دهید. هر کدام که معادله را به تساوی درست تبدیل کرد، همان جواب است.

نکته‌ی ۱ در حل این تست‌ها ممکن است بسته به مقدار kیی که قرار می‌دهید، ۲ گزینه، معادله را به تساوی درست تبدیل کنند. در این حالت، مقدار k را فقط برای این دو گزینه تغییر دهید و

جواب‌های جدید را کنترل کنید تا به گزینه‌ی یکتای درست برسید.
برای اینکه متوجه این موضوع بشین، براتون یه مثال حل می‌کنم، که این روش حل، یک نمونه‌ی بسیار پیچیده و سمج محسوب می‌شه.

نکته‌ی ۲ چنانچه در این حالت دو گزینه، هر دو پاسخ‌های درست را می‌دادند، گزینه‌ای درست است که کامل‌تر است. یعنی در بازه‌های کوچک‌تر، تعداد پاسخ‌های بیشتری دارد.

تست

جواب عمومی $\sin(x+\frac{\pi}{6})\times\sin(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4}$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $k\pi$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

حل: در گزینه‌های جواب، مقدار k را به‌طور دلخواه، طوری انتخاب می‌کنم که جواب‌ها با هم برابر نباشند.

۱) $k=0\Rightarrow\frac{\pi}{4}$ ۲) $k=1\Rightarrow\frac{\pi}{2}$

۳) $k=0\Rightarrow 0$ ۴) $k=-1\Rightarrow-\frac{\pi}{4}$

گزینه‌هام به شکل زیر در اومدن:

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) 0 ۴) $-\frac{\pi}{4}$

حالا تک‌تک زاویه‌ها را در معادله قرار میدم تا ببینم کدومشون تساوی درست رو به من می‌ده!

۱) $x=\frac{\pi}{۴}=۴۵^\circ \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۶})\times\sin(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۴}$

$\frac{\pi}{۶}=۳۰^\circ$, $x=۴۵^\circ \Rightarrow \sin(۷۵^\circ)\times\sin(۱۵^\circ)=\frac{۱}{۴}$

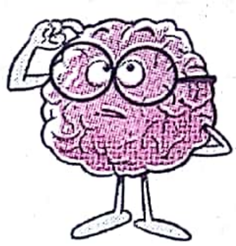
تخمین سریع: $\sin۷۵^\circ=۰/۹۶$

تخمین سریع: $\sin۱۵^\circ=۰/۲۵$

$\Rightarrow ۰/۹۶\times۰/۲۵\simeq۰/۲۴\simeq\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$

گزینه‌ی «۱» می‌تواند درست باشد.

گزینه‌ی «۲» را کنترل می‌کنم.



$x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow$ معادله: $\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})\times\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶})$

$=\sin(۱۲۰^\circ)\times\sin(۶۰^\circ)$

$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۴}=۰/۷۵\neq\frac{۱}{۴}$

پس گزینه‌ی ۲ غلط است.

✗ گزینه‌ی (۳): $x=۰\Rightarrow\sin(۳۰^\circ)\times\sin(-۳۰^\circ)=-\sin^۲(۳۰^\circ)=-\frac{۱}{۴}$

✓ گزینه‌ی (۴): $x=-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\sin(-۱۵^\circ)\times\sin(-۷۵^\circ)=\frac{۱}{۴}$ مثل گزینه‌ی (۱)

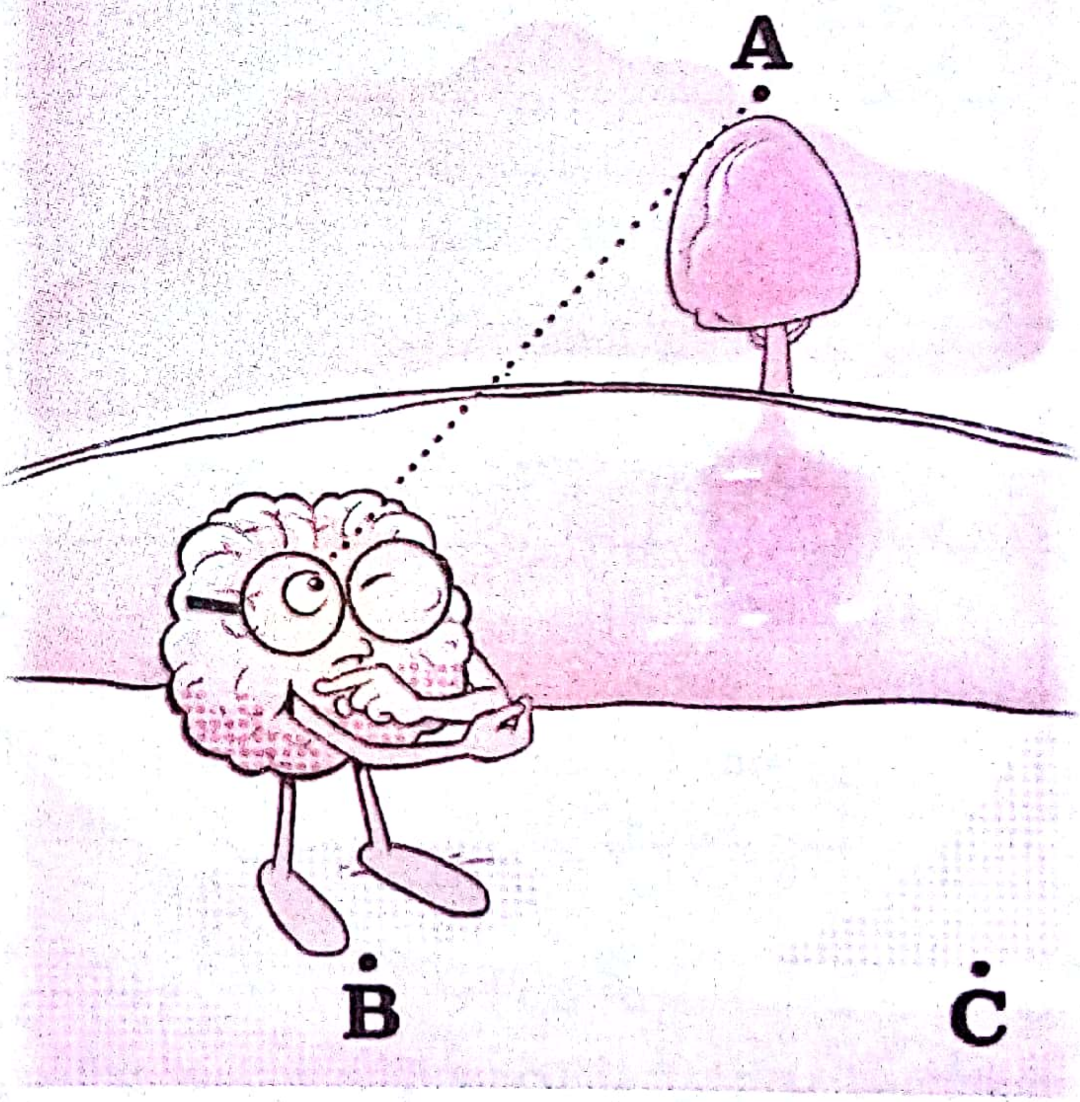
همیـــن حالتی که بهتـــون گفتم، پیش اومـــد. مقادیری که برای k انتخـــاب کـــرده بودم، هـــم در گزینه‌ی (۱) و هـــم در گزینه‌ی (۴) ما رو به تســـاوی درســـت رســـوند. پس مقدار k را برای این دو گزینـــه تغییـــر میـــدم و با زوایـــای جدید آزمایـــش می‌کنم.
در مسائل عادی معمولاً در همین گام اول جواب می‌گیریم.

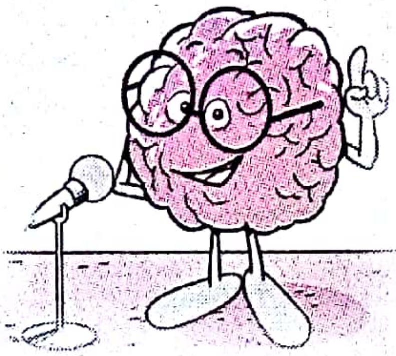
در مســـائل دشوارتر به همین نمونه برخورد می‌کنیم که دو گزینه، مقادیر درســـتی رو میدن. ضمناً با عوض کردن k باز هم به جواب درســـت در هر دو گزینه برخورد می‌کنیم. در این شرایط خاص به این نکته توجه کنین که پاسخی، جواب تست می‌باشد که کامل‌تر اســـت. یعنی در بازه‌ی کوچک‌تر، تعداد بیشـــتری جواب به شـــما می‌دهد. (یک راه حل تشخیص ساده‌تر این است که ببینین مخرج کدام گزینه که شامل $k\pi$ یا $2k\pi$ است، بزرگ‌تر است.) که در اینجا واضح اســـت. تعداد جواب‌های گزینه‌ی (۴) در بازه‌ی کوچک‌تر، از تعداد جواب‌های گزینه‌ی (۱) بیشتر است. لذا پاسخ کامل و درست، گزینه‌ی شماره‌ی (۴) است.

این تست حالت خاصی بود، برای همین هم اون رو برای شما حل کردم. در عمل خیلی کم با این‌گونه تســـت‌ها مواجه می‌شـــید. معمولاً در همان گام اوّل و یا نهایتاً گام دوم به نتیجه می‌رسید، نگران نباشید.

بخش دوم

کاربردهای مثلثات سریع





کاربرد مثلثات سریع در یادگیری مثلثات پایه: (توصیه به دبیران)

مثلثات یکی از شیرین‌ترین مباحث ریاضی به شمار می‌رود. در واقع تنوع مسائلی که می‌توانیم با استفاده از مثلثات حل کنیم، بسیار گسترده است. یکی از محدود کارهای بسیار پسندیده‌ای که در تألیف کتاب‌های درسی دوره‌ی جدید دبیرستان انجام شده است، آموزش مثلثات به روش حل مسأله است.

آموزش به روش حل مسأله به دانش‌آموزان کمک می‌کند که راحت‌تر با موضوع مورد بحث ارتباط برقرار کنند و مفاهیم را راحت‌تر درک کنند و با کاربردهای مطالب، بهتر آشنا شوند.

امّا در این میان مشکلی که به وجود می‌آید این است که حتماً نیاز به یک ماشین‌حساب در کلاس احساس می‌شود. در کتاب درسی در ضمن حل مسأله می‌بینیم که مؤلف کتاب هرجا لازم شده مقادیر توابع اصلی مثلثاتیِ sin و cos و tan رو برای زوایای مختلف بالاجبار آورده است. (مثلاً: $\tan ۲۶^\circ$ یا $\sin ۳۹^\circ$ و یا $\cos ۲۷^\circ$ و ...)

امّا مثلثات سریع در این میان می‌تواند نقش بسیاربسیار کاربردی و مثبتی را ایفا کند.

پیشنهاد اکید بنده به همکاران گرامی که آموزش ریاضی انجام می‌دهند این است که؛ از تجربه‌ی شخصی این حقیر استفاده

نمایند و نتیجه‌ی حاصله را به عینه مشاهده کنند.

■ **شیوه‌ی تدریس به این صورت است که:**

قدم اوّل: ابتدا مفاهیم اوّلیه توابع مثلثاتی با استفاده از مثلث قائم‌الزاویه به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود و مسائل بسیار ابتدایی در این زمینه حل شود.

قدم دوم: مثلثات سریع به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود تا دانش‌آموزان قادر باشند به سرعت مقادیر توابع مثلثاتی را برای همه‌ی زوایا تخمین بزنند. (گام دوم یعنی تخمین سریع توابع مثلثاتی برای کلیه زوایا که در این کتاب آموزش داده شده است و آموزش آن حداکثر ۲ جلسه هم زمان نیاز دارد.)

قدم سوم: از مسائل متنوع کاربرد مثلثات در زندگی روزمره (مثل حل مثلث) استفاده شود (در این زمینه مطالب کتاب درسی هم بسیار مورد استفاده قرار بگیرند) همچنین چند مسأله‌ی کلاسیک ارائه شده در این کتاب و مشابه این مسائل برای دانش‌آموزان مطرح شود.

بدین شکل دانش‌آموزان نیازی به استفاده از ماشین‌حساب مهندسی در کلاس درس نخواهند داشت.

تذکر : دقت کنید وقتی دانش‌آموزان با اسم مثلثات مواجه می‌شوند، با توجه به اسم این درس که کمی خشن به نظر می‌رسد، به طور ناخودآگاه احساس ترس می‌کنند. این ترس وقتی که می‌بینند حل مسائل ابتدایی حتی توسط معلّمان، بعضاً نیاز به استفاده از ماشین‌حساب مهندسی دارد، تبدیل به وحشت می‌شود! یعنی دانش‌آموز در ضمیر ناخودآگاه خود مرتباً این جمله را تکرار

می‌کند: «ببین چه درس سختیه که معلّم هم بدون ماشین‌حساب مهندسی نمی‌تونه مسائلش رو حل کنه!»

این ترس و اضطراب موجب می‌شود که فقط درصد بسیار کمی از دانش‌آموزان با مثلثات ارتباط درست برقرار کنند و بقیه تا آخر دوران تحصیل، هروقت اسم مثلثات آمد، دچار وحشت و اضطراب شوند، در صورتی‌که اتفاقاً مثلثات از شیرین‌ترین بخش‌های ریاضیات محسوب می‌شود.

شیوه‌ی تدریس به روش حل مسئله

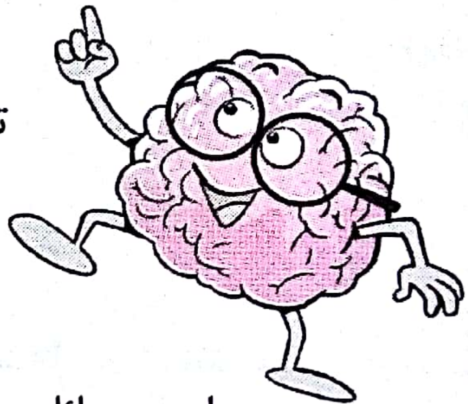
عیب: احتیاج به ماشین‌حساب مهندسی وجود دارد.

حُسن: دانش‌آموز با مفاهیم و کاربردها بهتر آشنا می‌شود.

راهکار

با استفاده از مثلثات سریع این عیب به راحتی برطرف می‌شود.

کاربردهای مثلثات سـریع در مسـائل جالب و سرگرم کننده‌ی روزمره:



تخمیـن توابـع مثلثاتـی بـدون ماشین‌حسـاب می‌تونـه بسـیار درخور توجه باشـه. با کسـب این مهارت می‌تونیم انواع کاملاً جدیدی از مسـائل رو حل کنیم. خیلـی از مردم مثلثات رو فقـط به مثلث‌ها مربـوط می‌دونن، در صورتی‌که موضوع خیلی‌خیلی گسترده‌تر از این است. در اینجا منظور بحث من همه‌ی کاربردهای مثلثات نیسـت، (چون کاربردهای مثلثات خیلی بیشـتر از اون چیزیه که فکر می‌کنید. در مسائل مهندسی برق، عمران، مکانیک، کوانتوم، اخترشناسی، ارتعاشات و ...) بلکه در اینجا می‌خوام به حل چند مثال جالب و سرگرم‌کننده اکتفا کنم. بـه زودی خودتـون متوجه می‌شـین که با کسـب مهـارت در تخمین توابع مثلثاتی خیلی بیشـتر از گذشته از ریاضیات بدون ماشین‌حساب لذت می‌برید.

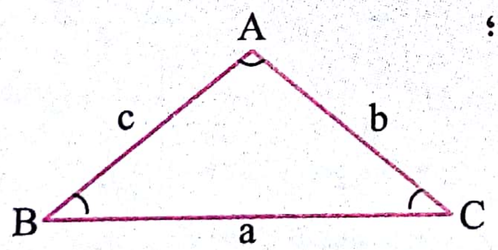
وقتـی که بـا دانش‌آموزان و یا دانشـجویان به کـوه میریم، من معمـولاً یه نقاله، یـه خط‌کش و یه متر همراه خودم می‌برم و در حیـن تفریح، ما معمولاً ارتفاع یک درخـت بلند که در دامنه‌ای دوردسـت روئیده و یا ارتفاع قله‌های خـاص یا عرض دریاچه یا

فاصله‌ی نقاط مختلف از یک کوه و تپه و یا فاصله تا برج میلاد یا تا قله‌ی دماوند و ... را اندازه‌گیری می‌کنیم. شـــاید این مسائل در نظر بعضی‌ها مهم نباشـــه، امّا در نظر خیلی‌ها بسیار جذابِ و اگر از ریاضیات بدون ماشین‌حساب لذت می‌برید، این مسائل می‌تونه شما رو شیفته‌ی خودش کنه.

۱۶ تکنیک مثلث‌بندی:

پایه‌ای‌ترین مفهوم در حل این تیپ مسائل، مثلث‌بندی نام دارد. یـــه فرمول خیلی خـــوب داریم که در تمـــام مثلث‌ها صدق می‌کنه و به فرمول سینوس‌ها مشهوره:

این فرمول اینه؛



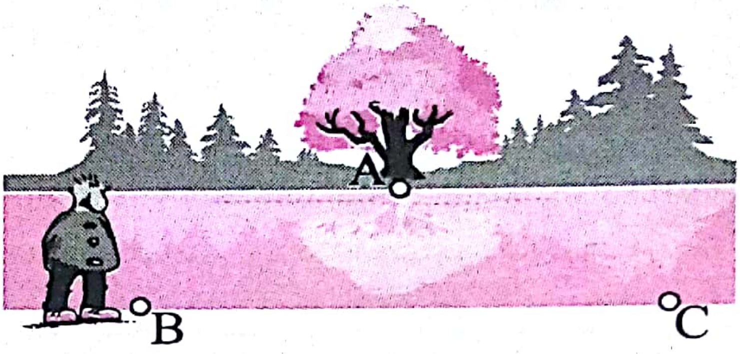
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

دو تیپ مسئله‌ی جالب رو که الان می‌تونیم حل کنیم، براتون در ادامه‌ی مطلب آوردم.

۱ مکان نقطه‌ی A:

اگـــر در یک ســـمت یک دریاچه قرار داشـــته باشـــید و در طـــرف دیگر دریاچه، یک درخت و یا یـــک تیرچه‌ی بلندی قرار داشـــته باشـــه به راحتی می‌تونیـــد فاصله‌تون از درخت

رو تخمین بزنید. روش کار رو بهتون یاد میدم، البته باید به چند نکته‌ی مهم هم دقت کنید که جواب رو درست به دست بیارید.



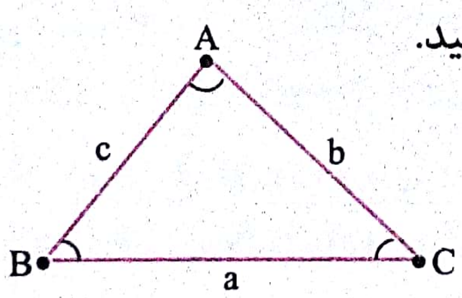
روش کار: از نقطه‌ی شروع (مثلاً نقطه‌ی B) زاویه رؤیت درخت یا تیر A را با نقّاله اندازه می‌گیریم سپس شروع به حرکت می‌کنیم تا از نقطه‌ای دیگر یعنی C به درخت نگاه کنیم. (سعی می‌کنیم حتماً روی مسیر مستقیم راه بریم. اگه مسیرتون مارپیچ باشه، انتظار نتیجه‌ی دقیق نداشته باشید! سعی کنید یک کم جدی باشید و مسیر رو صاف تا نقطه‌ی C طی کنید.) و مقدار فاصله‌ی B تا C رو اندازه می‌گیریم. (متر رو برای همین می‌بریم.) اگر هم متر همراهتون نیست، کافیه طول قدم‌های خودتون رو از قبل بدونید و با قدم زدن فاصله رو متر کنید. حالا که به نقطه‌ی دلخواه C رسیدید، باز به نقطه‌ی A نگاه کنید و زاویه‌ی رؤیت را یادداشت کنید. (هرچقدر طول مسیری که طی می‌کنید، بیشتر باشه، جوابتون دقیق‌تر می‌شه.) کارمون تموم شد. پس ما تا اینجا ۳ تاچیز یادداشت کردیم.

۱) زاویه‌ی رؤیت جسم A از نقطه‌ی B (یعنی زاویه‌ی B)
۲) طول قاعده یا مسـیری که طی کرده‌ایم. (یعنی ضلع BC)
۳) زاویه‌ی رؤیت جسم A از نقطه‌ی C (یعنی زاویه‌ی C)

تمام شد.

تذکر: در اندازه‌گیـری زوایـا با اسـتفاده از نقّاله باید صفحه‌ی مثلث فرضی رو در ذهنتون داشته باشید (می‌دونیـد کـه از هـر ۳ نقطـه‌ی دلخـواه، یـک صفحه می‌گـذرد). برای اندازه‌گیـری هر زاویه، نقّالـه باید همواره بـا صفحه‌ی مثلث هم‌راسـتا باشـه. الان شـما دوتـا زاویه از مثلـث فرضـی ABC و یـک ضلـع از اون رو هـم دارید.

الف) بـه راحتی از رابطه‌ی $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ می‌تونید زاویه‌ی A رو حساب کنید.

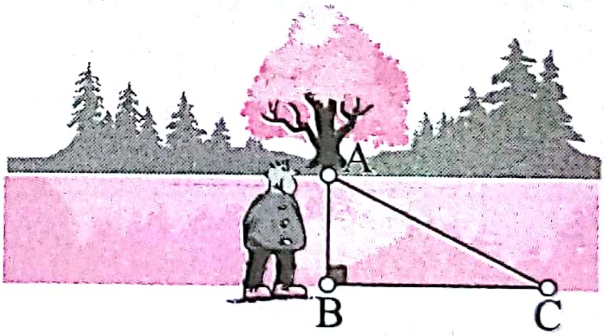


ب) و همچنین از رابطه‌ی سینوس‌ها

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ می‌تونید طول اضلاع دیگه‌ی مثلث رو هم حساب کنید.

تعیین عرض دریاچه:

وقتــی می‌خواهید عرض دریاچه رو حســاب کنید اگر یکی از زاویه‌ها رو 90° در نظر بگیرید *کار عین هلو آسون می‌شه.* (به شکل فرضی نگاه کنید) در این حالت می‌ریم و روبه‌روی نقطه‌ی A، خودمون رو قرار میدیم. (یعنی نقطه‌ی B) ســپس شــروع به حرکت می‌کنیم تا به نقطه‌ی C برسیم و طول BC رو یادداشت می‌کنیم و در نهایت زاویه‌ی رؤیت نقطه‌ی A رو از انتهای مسیر یعنی نقطه‌ی C یادداشت می‌کنیم. عرض دریاچه تقریباً برابر AB اســت که به راحتی می‌شه از فرمول زیر به دستش آورد.



۱) زاویه‌ی C رو که داریم (خودمون یادداشت کردیم.)

۲) مسیر BC رو هم که خودمون طی کردیم و اندازه گرفتیم.

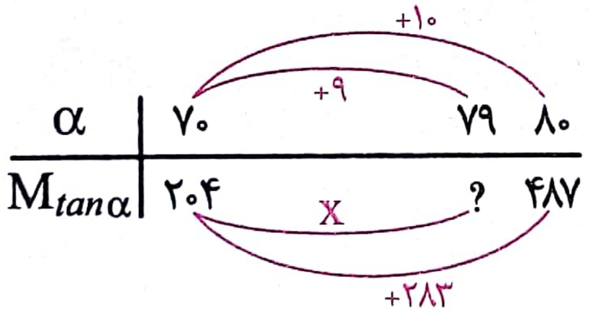
در مثلث ABC داریم:

$$\tan C = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{عرض دریاچه}}}{AB} = BC \times \tan C$$

مثال

فرض کنید تو تفریح علمی می‌خواهیم عرض دریاچه رو تخمین بزنیم. از نقطه‌ی B که درست روبه‌روی نقطه‌ی A در طرف دیگه‌ی دریاچه قرار داره، شروع به حرکت می‌کنیم و طول مسیرمون رو یادداشت می‌کنیم. فرض کنید بعد از ۱۰۰ متر به نقطه‌ی C برسیم. از نقطه‌ی C به نقطه‌ی A نگاه می‌کنیم و زاویه‌ی رؤیت رو با نقّاله اندازه می‌گیریم (فرض کنید زاویه‌ی رؤیت‌مون 79° درجه باشه). عرض دریاچه چقدر است؟

اوّل تانژانت 79° را تخمین می‌زنیم. (اینکار برای ما خیلی آسونه)



مقادیری که به عدد طلایی اضافه می‌شود.	مقادیری که به زاویه اضافه می‌شود.
۲۸۳	۱۰
x=۲۵۴	۹

$$M_{\tan ۷۹^\circ} = M_{\tan ۷۰^\circ} + ۲۵۴$$

$$\Rightarrow M_{\tan ۷۹^\circ} = ۲۰۴ + ۲۵۴ \Rightarrow M_{\tan ۷۹^\circ} = ۴۵۸$$

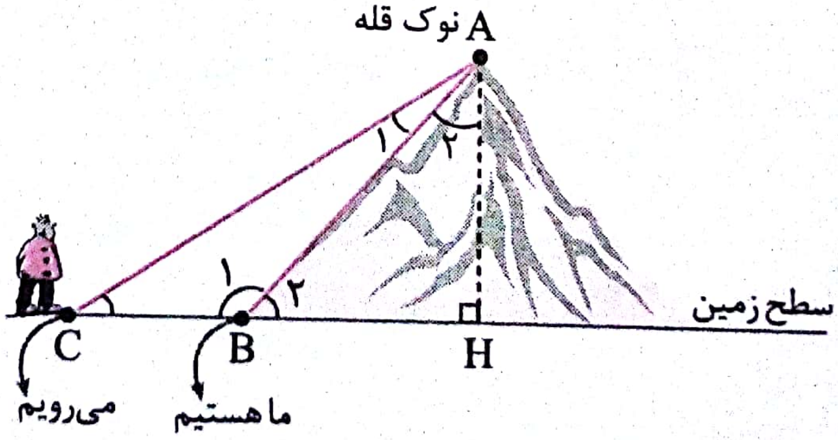
$$\Rightarrow \tan ۷۹^\circ = \frac{۴۵۸ + ۷۹}{۱۰۰} = \frac{۵۳۷}{۱۰۰} \simeq ۵/۳۷$$

$\Rightarrow$ عرض دریاچه $= AB \simeq ۱۰۰ \times \tan ۷۹^\circ \simeq ۵۳۷$ متر

بعله! عرض دریاچه حدود ۵۰۰ متر خواهد بود. (اگه هوس شنا به سرتون زده، بسم‌الله!)

۲ تخمین ارتفاع:

فرض کنید در پای یک کوه ایستادیم و می‌خوایم ارتفاع قله رو تخمین بزنیم.



■ **روش کار:**

۱) از نقطه‌ی B نوک قله رو می‌بینیم و زاویه‌ی رؤیت رو با

نقّاله اندازه‌گیری می‌کنیم. ($\hat{B}_2$)

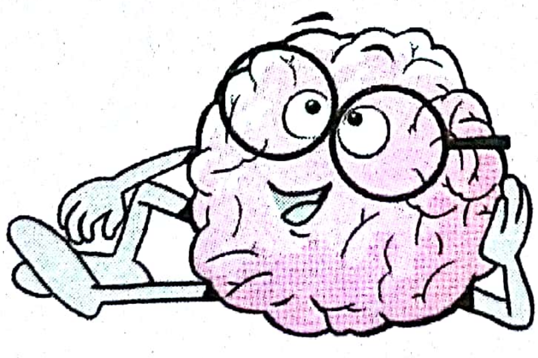
۲) مسافتی رو طی می‌کنیم و خودمون رو به نقطه‌ی C می‌رسونیم و مسافت طی شده رو یادداشت می‌کنیم. (BC)

۳) از نقطه‌ی C به قله نگاه می‌کنیم و زاویه رؤیت رو یادداشت می‌کنیم. ($\hat{C}$)

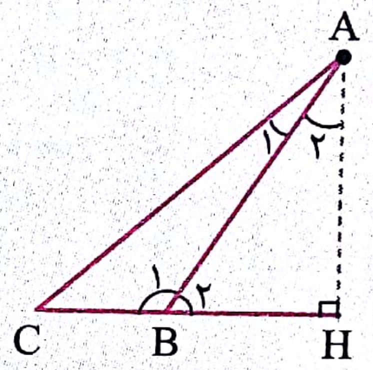
قدم اوّل: در مثلث ABC که طول BC و زاویه‌ی C رو داریم، به راحتی زاویه‌ی B_1 و سپس زاویه‌ی A_1 رو حساب می‌کنیم.

$$\hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{B}_2$$

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - (\hat{C} + \hat{B}_1)$$



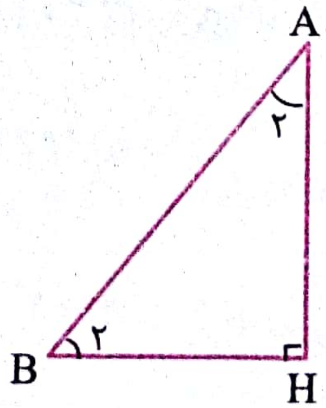
پس الان در مثلث ABC دو زاویه و ضلع بین اون‌ها رو داریم.
با استفاده از رابطه‌ی سینوس‌ها طول AB رو به دست میاریم.



$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A_{۱}} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin A_{۱}}$$

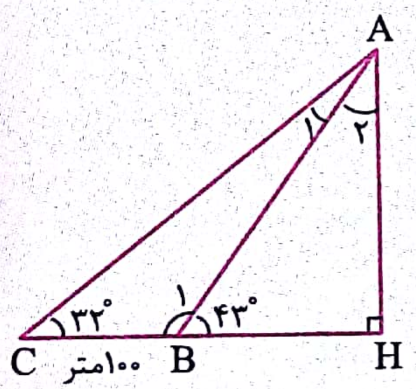
قدم دوم: در مثلث ABH مقدار زوایا رو داریم و با استفاده از فرمول به راحتی AH یا همان ارتفاع قله رو به دست میاریم.

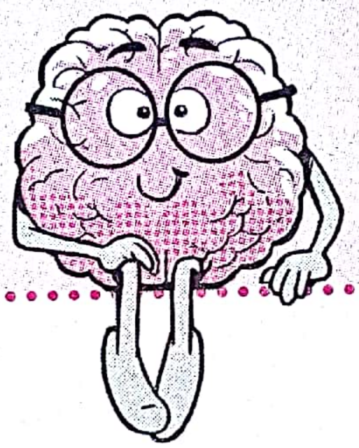
$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin B_{۲} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin B_{۲}$$



مثال

فرض کنید تو سفر تفریحی تو نقطه‌ی C قرار داریم و با زاویه‌ی رؤیت ۳۲ درجه، نوک قله رو می‌بینیم. سپس ۱۰۰ متر به طرف کوه حرکت می‌کنیم و در نقطه‌ی B نوک قله رو با زاویه‌ی ۴۳° رؤیت می‌کنیم. مطلوب است تعیین ارتفاع قله:





قدم اوّل:

$$\hat{B}_۱=۱۸۰^\circ-۴۳^\circ=۱۳۷^\circ ,\ \hat{A}_۱=۱۸۰^\circ-(۳۲^\circ+۱۳۷^\circ)=۱۱^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}: AB=\frac{BC\times \sin C}{\sin A_۱}=\frac{۱۰۰\times \sin ۳۲^\circ}{\sin ۱۱^\circ}\Rightarrow$$

به راحتی $\sin ۳۲^\circ$ و $\sin ۱۱^\circ$ را تخمین می‌زنیم.

$$\sin ۳۲^\circ=۰/۵۲ ,\ \sin ۱۱^\circ=۰/۱۸$$

$$\Rightarrow AB = \frac{۱۰۰\times ۰/۵۲}{۰/۱۸} \Rightarrow AB = ۲۸۸/۸ \simeq ۲۸۹$$

قدم دوم:

$$\overset{\Delta}{ABH}: AH = AB\times \sin B_۲$$

$$\Rightarrow AH = ۲۸۹\times \sin ۴۳^\circ$$

$\sin ۴۳$ را به راحتی تخمین می‌زنیم. $\sin ۴۳^\circ = ۰/۶۸$

$$\Rightarrow AH = ۲۸۹\times ۰/۶۸$$

$$\Rightarrow AH = ۱۹۶/۵ \text{ متر}$$

بعله! ارتفاع این قله ۱۹۶/۵ متر می‌باشـد. (همچین قله هم نیسـت‌ها، تپه اسـت!) اگه می‌خواین تصور کنین ارتفاع این قله چقدره، کافیه یه ساختمون ۶۶ طبقه‌رو توی ذهنتون مجسم کنید! (بعله! اگه خیلی بلند نباشه، همچین کوتاه هم نیست‌ها!)

....

....

....

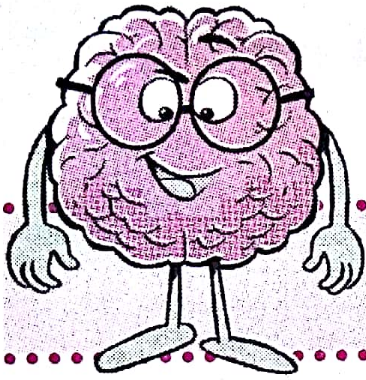
....

....

....

....

....



مثلثات سریع در کنکور:

می‌دونم که می‌دونید، هر ساله هم در کنکور رشته تجربی و هم در کنکور رشته ریاضی بین یک تا دو تست از مباحث مثلثات خواهیم داشت. این تست‌ها جزء تست‌های بسیار دشوار کنکور محسوب می‌شوند و تعداد داوطلبینی که به تست‌های مثلثات کنکور پاسخ درست می‌دهند، طبق آمار رسمی ارائه شده، کم‌تر از ۰/۱ درصد می‌باشند! بعله، کم‌تر از یک دهم درصد! و این یعنی یک فرصت طلایی برای کسانی که می‌توانند به تست‌های مثلثات پاسخ صحیح بدهند. همانطور که می‌دانید چنانچه ما قادر باشیم به تست‌هایی که عده‌ی کمی از داوطلبین به آن‌ها پاسخ صحیح می‌دهند، پاسخ دهیم، در تراز ما تأثیر مثبت فوق‌العاده زیادی خواهد داشت.

پاسخ صحیح دادن به یک تست دشوار ریاضی می‌تواند تا ۷۲ برابر پاسخ صحیح یک تست ساده‌ی یک درس عمومی در تراز ما تأثیر مثبت داشته باشد! (بعله! درست خوندید، ۷۲ برابر! این موضوع رو مشاور تحصیلی شما می‌تونه به خوبی به شما متذکر بشه و همچنین عزیزانی که متخصص سنجش و ارزشیابی هستند، می‌تونن شما رو به خوبی متوجه این موضوع کنند.)

یادگیری مثلثات سریع به عنوان یک ابزار بسیار ساده و کاربردی،

بهترین مکمل تقویتی اســـت که در بخش مثلثات به کمک شما می‌آید.

با اســـتفاده از این مکمل، شما قادر خواهید بود تست‌های بسیار دشـــوار مثلثات را به گونه‌ای دیگر و به سادگی و با سرعت بسیار بالایی حل کنید و لذّت ببزید.
مثلثات ســـریع در کنکور مثل یک ابـــزار جادویی می‌مونه. عین عصای حضرت موسی می‌تونید باهاش معجزه کنید.

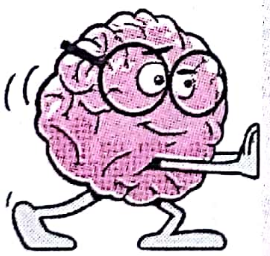
برای اینکه متوجه منظورم بشـــید براتون چندتا تست کنکور حل می‌کنم تا حسابی حالشو ببرید.

تست کنکور ریاضی

حاصل عبارت $(\sin\frac{\pi}{۱۲})\sin(\frac{۷\pi}{۱۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$



خُب! شروع می‌کنیم به حل کردن.

حل: اوّل زاویه‌ها رو به درجه تبدیل می‌کنیم. (می‌دونیم برای تبدیل رادیـــان به درجه، کافیه به جای π رادیـــان، ۱۸۰ درجه قرار بدیم.)

رادیان $\frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱۸۰}{۱۲} = ۱۵$ درجه

درجه $۱۰۵ = \frac{۷\times۱۸۰}{۱۲} = \frac{۷\pi}{۱۲}$ رادیان

حالا کافیه مقادیر $\sin ۱۵^\circ$ و $\sin ۱۰۵^\circ$ رو تخمین بزنیم و حاصل رو به دست بیاریم. (کاریکه الان توش استاد شدیم.)

$$\sin ۱۵^\circ = ?$$

$$M_{\sin ۱۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۱۰^\circ} + M_{\sin ۲۰^\circ}}{۲} = \frac{۷+۱۴}{۲} = ۱۰/۵$$

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = ۱۵ + M_{\sin ۱۵^\circ} = ۱۵ + ۱۰/۵ = ۲۵/۵$$

$$\Rightarrow ۲۵/۵ \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم.}} ۰/۲۵۵$$

$$\Rightarrow \sin ۱۵^\circ = ۰/۲۵۵$$

$$\sin(۱۰۵^\circ) = ?$$

$$\sin(۱۰۵^\circ) = \sin(۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ) = \sin ۷۵^\circ$$

$$M_{\sin ۷۵^\circ} = \frac{M_{\sin ۷۰^\circ} + M_{\sin ۸۰^\circ}}{۲} = \frac{۲۴+۱۸}{۲} = ۲۱$$

$$\alpha + M_{\sin\alpha} = ۷۵ + ۲۱ = ۹۶$$

$$\Rightarrow ۹۶ \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم.}} ۰/۹۶$$

$$\Rightarrow \sin ۷۵^\circ = ۰/۹۶$$

$$\Rightarrow \sin ۱۰۵^\circ = ۰/۹۶$$

$$\sin ۱۵^\circ \times \sin ۷۵^\circ = ۰/۲۵ \times ۰/۹۶$$
$$= \frac{۱}{۴} \times ۰/۹۶$$
$$\simeq ۰/۲۴$$

مقدار تقریبی عبارت رو برابر ۰/۲۴ به دست اوردیم. حالا یه نگاه به گزینه‌ها بندازیم.

۱) $\frac{۱}{۳} \simeq ۰/۳۳$ ۲) $\frac{۱}{۴} = ۰/۲۵$

۳) $-\frac{۱}{۴} = -۰/۲۵$ ۴) $-\frac{۱}{۳} = -۰/۳۳$

همانطور که می‌بینید گزینه‌ی «۲» داره فریاد می‌زنه که درسته! (به همین سادگی)

تذکر: برای اینکه کاملاً متوجه طریقه‌ی حل کردن بشـــید، براتون کامل همه‌ی مراحل رو یادداشت کردم. بدون شک شما نیاز به این همه نوشتن ندارید. این تست رو به سادگی این جوری که در ادامه براتون نوشتم حل کنید:

خط فکری: $\sin(\frac{\pi}{۱۲}) \times \sin(\frac{۷\pi}{۱۲}) = ?$

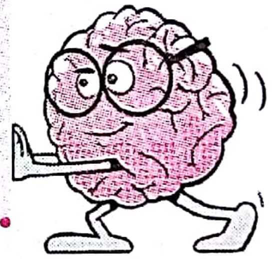
حل:
$$\sin(\frac{\pi}{۱۲}) \times \sin(\frac{۷\pi}{۱۲}) = \sin(\frac{۱۸۰}{۱۲}) \times \sin(\frac{۷ \times ۱۸۰}{۱۲})$$
$$= \sin(۱۵) \times \sin(۱۰۵) = \sin ۱۵ \times \sin ۷۵$$
$$= ۰/۲۵۵ \times ۰/۹۶ \simeq \frac{۱}{۴} \times ۰/۹۶ = ۰/۲۴$$

- همونطور که می‌بینید حل تســـت خیلی سریع انجام می‌شه. (اگه طریقه‌ی کلاســیک حل تســت رو بلد نبودیــد، این روش خیلی راحت بهتون کمک می‌کنه! هر چند این تست به روش کلاسیک هم برای دوســتانی که بلد هستند، تست آسونیه ولی برای اینکه با این روش آشـــنا بشید، ازش استفاده کردم.) حالا بریم سراغ یه تست نسبتاً مشکل‌تر.

تست کنکور

حاصل $\frac{۱}{۲}+۲\sin ۲۰\times\cos ۱۰$ کدام است؟

۱) $\cos ۴۰^\circ$
۲) $\sin ۴۰^\circ$
۳) $۲\cos^۲ ۴۰^\circ$
۴) $۲\sin^۲ ۴۰^\circ$



حل این تست به روش کلاسیک نسبتاً دشواره، امّا با مکمل MBM راحت اون رو حل می‌کنیم. پس با من همراه باشید.

حل:

$$\frac{۱}{۲}+۲\sin ۲۰\times\cos ۱۰=?$$

$$\sin ۲۰^\circ=۰/۳۴$$

$$\cos ۱۰^\circ=\sin ۸۰^\circ=۰/۹۸\simeq ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}+۲\times ۰/۳۴\times ۱=۰/۵+۰/۶۸=۱/۱۸$$

گزینه‌ها:

۱) $\cos ۴۰^\circ = ۰/۷۶$

۲) $\sin ۴۰^\circ = ۰/۶۴$

۳) $۲ \times \cos^۲ ۴۰^\circ = ۲ \times ۰/۷۶ \times ۰/۷۶$

$= ۱/۱۵۵۲$ (ضرب سریع رو که بلدید)

۴) $۲ \times \sin^۲ ۴۰^\circ = ۲ \times ۰/۶۴ \times ۰/۶۴$

$= ۰/۸۱۹۲$ (ضرب سریع رو که بلدید)

همانطور که می‌بینید حتی بدون نیاز به محاسبه‌ی کامل و خیلی دقیق گزینه‌ها وقتی مقدار عبارت‌رو برابر ۱/۱۸ به دست اوردید، به راحتی می‌تونید تشخیص بدید که فقط گزینه شماره‌ی «۳» مقداری بزرگ‌تر از ۱ داره.

تست کنکور تجربی

حاصل عبارت $\dfrac{\sin ۸۰ - \sin ۴۰}{\cos ۸۰}$ برابر کدام است؟

۱) $۴\sin ۱۰^\circ$ ۲) $۴\cos ۱۰^\circ$

۳) $۲\cos ۱۰^\circ$ ۴) $۲\sin ۱۰^\circ$

بدون اینکه بخوام با حرف زدن اضافی! وقت ارزشمند شما رو بگیرم، این تست به ظاهر گردن کلفت رو براتون می ترکونم!

حل: $\dfrac{\sin ۸۰ - \sin ۴۰}{\cos ۸۰} \simeq \dfrac{۰/۹۸ - ۰/۶۴}{۰/۱۷} \simeq \dfrac{۳۴}{۱۷} \simeq ۲$

گزینه‌ها:

۱) $4\sin 10^\circ = 4\times 0/17 = 0/68$ (عمراً جواب نیست)

۲) $4\times\cos 10^\circ = 4\times 0/98 = 3/92$ (خیلی زیاده!)

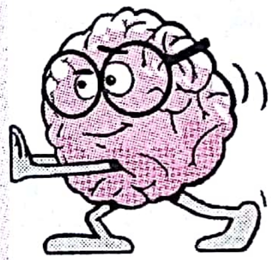
۳) $2\times\cos 10^\circ = 2\times 0/98 \simeq 1/96$ (خودشه! دستگیر شد!)

۴) $2\sin 10^\circ = 2\times 0/17 = 0/34$ (خیلی ریز می‌بینمش)

تست کنکور

حاصل عبارت $\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$ به ازای $x = 7/5^\circ$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{8}$
۳) $\frac{3}{8}$
۴) $\frac{3}{16}$



بدون صحبت اضافه و با فرض بر اینکه مثلثات کلاسیک رو بلد نیستیم (یا بلدیم و یادمون رفته!) شروع می‌کنیم به حل تست:

حل:

$$\sin 7/5^\circ \simeq 0/12$$

$$\cos 7/5^\circ = \sin(82/5^\circ) = 0/98 \simeq 1$$

$$\Rightarrow \sin(7/5)\cos(7/5)(1-2\sin^2 7/5)$$

$$= 0/12\times 1\times(1-2\times(0/12)^2)$$

$$=\circ/\text{۱۲}\times(\overbrace{\text{۱}-\text{۲}\times\circ/\circ\text{۱۴۴}}^{\simeq\circ/\text{۹۷}})\simeq\circ/\text{۱۲}\times\circ/\text{۹۷}\simeq\circ/\text{۱۱}$$

گزینه‌ی «۲» داره داد می‌زنه که درسته، **یکی جلوی دهنش رو بگیره، گوشمون رو کر کرد!**

همونطور که دیدید، خیلی راحت می‌تونیم تست‌های مثلثاتی رو با تخمین سریع پاسخ بدیم و این یعنی اینکه هر جایی به هر علّتی (حالا یا کم‌سوادی مثلثاتی و یا دشواری حل تست به روش کلاسیک) قادر به حل تست نبودیم، می‌تونیم از دانش جدیدی که به دست اوردیم استفاده کنیم. در ادامه برای اینکه بیشتر شمارو خوشحال کنم! چندتا تست دیگه هم حل می‌کنم.

تست کنکور

حاصل $\cos\text{۴}\circ(\text{۲}\cos\text{۸}\circ-\text{۱})$ کدام است؟

۱) $-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ۲) $\sin\text{۲}\circ^\circ$ ۳) $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ۴) $-\sin\text{۴}\circ^\circ$

با چشم MBM ای به تست نگاه می‌کنیم. قیافه‌ی تست اینجوری می‌شه.

تست از نگاه MBM

حاصل $(\text{۱}-\text{۲}\times\circ/\text{۱۷})\times\circ/\text{۷۶}$ کدام است؟

۱) $-\circ/\text{۵}$ ۲) $\circ/\text{۳۴}$ ۳) $\circ/\text{۵}$ ۴) $-\circ/\text{۶۴}$

حل: این تســـت در واقع برخلاف ظاهر خشـــنی که داره، خیلی راحت در نگاه ما حقیر جلوه می‌کنه:

$$۰/۷۶\times(۰/۳۴-۱)=۰/۷۶\times(-۰/۶۶)=-۰/۵$$

پس گزینه‌ی «۱» رو تشویق کنید!

تست کنکور ریاضی

خلاصه شده‌ی عبارت $\tan ۲۰(۱+\cos ۴۰)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ$ ۲) $\sin ۴۰^\circ$

۳) $\cos ۲۰^\circ$ ۴) $\cos ۴۰^\circ$

خیلی سریع عینک MBM ای رو به چشم می‌زنیم تا با دانش خارق‌العاده‌ی خودمون! پاسخ صحیح رو پیدا کنیم.

تست از نگاه MBM

خلاصه‌شده‌ی عبارت $(۰/۷۶+۱)\times ۰/۳۶$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۳۴   ۲) ۰/۶۴   ۳) ۰/۹۴   ۴) ۰/۷۶

در کم‌تر از ۱۰ ثانیه، گزینه‌ی «۲» خودش‌رو به ما معرفی می‌کنه، تحویلش بگیرید!

تست کنکور تجربی

حاصل عبارت $4\sin 20 \sin 80 - 2\sin 10$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $\sin 10$

۳) 0 ۴) 1

عینک MBM رو به چشم می‌زنیم تا بـا قدرت جادویی‌مان! پاسخ صحیح رو پیدا کنیم.

تست از نگاه MBM

حاصل عبارت $4\times 0/34\times 0/98 - 2\times 0/17$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $0/17$ ۳) 0 ۴) 1

حل:

$$4\times 0/34\times \overset{\simeq 1}{0/98} - 2\times 0/17$$

$$\simeq 4\times 0/34\times 1 - 0/34$$

$$= 4\times 0/34 - 0/34$$

$$= 3\times 0/34 \simeq 1/02$$

گزینه‌ی «۴» یافت شد!

تست کنکور

حاصل عبارت $\cos 105^\circ \cos 165^\circ$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

تست از نگاه MBM

حاصل عبارت $(-0/25)(-0/96)$ کدام است؟

۱) $-0/33$ ۲) $-0/25$ ۳) $0/25$ ۴) $0/5$

حل:

$$(-0/25)(-0/96)$$

$$=\frac{1}{4}\times 0/96=0/24$$

در کم‌تر از چند ثانیه، گزینه‌ی «۳» رو به عنوان گزینه‌ی درست انتخاب می‌کنیم.

تست کنکور

اگر $\tan 20^\circ = 0/36$، حاصل $\frac{\sin 160 - \cos 200}{\cos 110 + \sin 70}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{17}{8}$ ۴) $\frac{31}{64}$

حل: برای پاسخ دادن به این سؤال، می‌بایست توابع مثلثاتی مربوط به زاویه‌ی ۲۰° را بدانیم تا بتوانیم تست را حل کنیم. به همین خاطر طراح محترم، مقدار $\tan ۲۰^\circ$ را به داوطلبین گفته است. (چیزی که ما اصلاً به اون نیازی نداریم!) ما به سادگی مقادیر توابع مثلثاتی را برای همه‌ی زوایا تخمین می‌زنیم. پس شروع می‌کنیم به حل:

تست از نگاه MBM

خلاصه شده‌ی عبارت $\frac{۰/۳۴+۰/۹۴}{-۰/۳۴+۰/۹۴}$ برابر کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۱/۸۷۵ ۳) ۲/۱۲۵ ۴) ۰/۴۸

حل:

$$\frac{۰/۳۴+۰/۹۴}{-۰/۳۴+۰/۹۴}=\frac{۱/۲۸}{۰/۶}=\frac{۱۲/۸}{۶}=۲/۱۳$$

گزینه‌ی ۳ رو بگیریدش در نره!

تست کنکور

ساده شده‌ی عبارت $\text{soc}\ ۵۰(\tan ۷۰+\tan ۱۰)$ برابر کدام است؟

۱) $\sin ۲۰^\circ$ ۲) $\cos ۲۰^\circ$

۳) $۲\sin ۲۰^\circ$ ۴) $۲\cos ۲۰^\circ$

مشــخصه که عینک MBM هم ما رو خوش‌تیپ‌تر می‌کنه و هم قیافه‌ی تست رو!

تست از نگاه MBM

ساده‌ی شده‌ی عبارت $۰/۶۴(۲/۷۴+۰/۱۷)$ برابر کدام است؟

۱) ۰/۳۴ ۲) ۰/۹۴

۳) ۲×۰/۳۴ ۴) ۲×۰/۹۴

حل:

$=۰/۶۴\times(۲/۷۴+۰/۱۷)$

(از ضرب دو عدد دورقمی بدون آنکه ظاهراً کاری انجام شود، استفاده کردم!)

$=۰/۶۴\times ۲/۹۱$

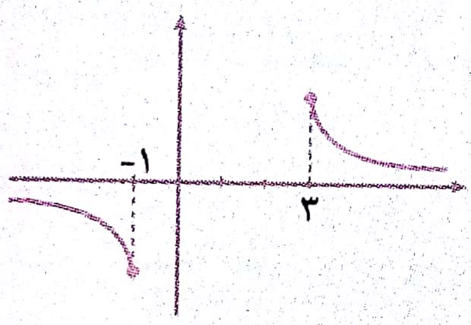
$\simeq ۱/۸۶۲$

تذکر: وقتی به $۲/۹۱\times ۰/۶۴$ می‌رسیم، حتی بدون نیاز به محاسبه‌ی حاصل‌ضرب، با یک نگاه به گزینه‌ها به راحتی می‌تونیم درستی گزینه‌ی «۴» رو تشخیص بدیم.

نگاهی به کنکور ۹۴

تست ۱۱۰ کنکور سراسری ریاضی ۹۴

شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=\sin^{-1}(u(x))$ است. ضابطه‌ی $u(x)$ به کدام صورت است؟



۱) $\frac{۲}{x-۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱-x}$

۳) $\frac{۱}{x-۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲-x}$

پاسخ حل اینجور تست‌ها راحته و فقط باید یه نگاه به شکل بیاندازیم و اطلاعاتی که از اون می‌گیریم رو دونه‌دونه با گزینه‌ها کنترل کنیم و گزینه‌ها رو یکی پس از دیگری حذف کنیم تا به جواب درست برسیم. می‌دونیم که (هرچی) $\sin^{-1}$ در مواقعی تعریف شده است که این «هر چی» بین ۱+ و ۱- باشه. همان‌طور که از شکل معلومه تابع به ازای $x=۰$ تعریف نشده است و فقط گزینه‌های (۱) (۲) به ازای $x=۰$ تعریف نشده هستن. پس گزینه‌های (۳) و (۴) حذف می‌شن. (چون در گزینه‌های (۳) و (۴) به ازای $x=۰$ مقادیر $\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}$ به دست میاد که مقادیر تعریف شده هستن). از طرفی از شکل معلومه که مقدار تابع به ازای $x=۳$ مثبت میشه. پس گزینه‌های (۱) و (۲) را کنترل می‌کنیم.

گزینه‌ی(۱): $\frac{۲}{x-۱}, x=۳ \Rightarrow y=\sin^{-۱}(\frac{۲}{۳-۱})=$

$\sin^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۲}>۰$ ق ق

گزینه‌ی (۲):

$\frac{۲}{۱-x}, x=۳ \Rightarrow y=\sin^{-۱}(\frac{۲}{۱-۳})=\sin^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۲}<۰$ غ ق ق

بعله! همان‌طور که دیدین اگه یه خورده شهامت داشته باشیم با همین دانش کممون هم، می‌تونیم به راحتی این تیپ تست‌ها رو حل کنیم.

تست ۱۱۱ کنکور سراسری ریاضی ۹۴

حاصل عبارت $((۱۶۹\times\sin(۲\cos^{-۱}(-\frac{۵}{۱۳}$ کدام است؟

۱) ۱۲۰-   ۲) ۶۰   ۳) ۶۰-   ۴) ۱۲۰

حل به روش MBM

می‌دونیم که $\cos^{-۱}(-x)=\pi-\cos^{-۱}(x)$ وضمناً $\frac{۵}{۱۳}\simeq ۰/۳۸$

$\Rightarrow \cos^{-۱}(-\frac{۵}{۱۳})=\pi-\cos^{-۱}(\frac{۵}{۱۳})$

سریع تخمین می‌زنیم که cos چه زاویه‌ای برابر ۰/۳۸ یا تقریباً ۰/۴ می شه.

$$\left.\begin{array}{l}\cos ۶۰^\circ=۰/۵\\ \cos ۷۰^\circ=۰/۳۴\end{array}\right\}\Rightarrow \cos ۶۵^\circ\simeq ۰/۴\simeq ۰/۳۸\Rightarrow \cos^{-۱}(\frac{۵}{۱۳})\simeq ۶۵^\circ$$

تقریب چشمی

$$\cos^{-1}(-\frac{۵}{۱۳})=۱۸۰-\cos^{-1}(\frac{۵}{۱۳})\simeq ۱۸۰-۶۵\simeq ۱۱۵^\circ$$

حالا می‌ریم بقیه رو حساب می‌کنیم.

$$۱۶۹\times\sin(۲\times۱۱۵^\circ)=۱۶۹\times\sin(۲۳۰^\circ)=۱۶۹\times\sin(۱۸۰+۵۰^\circ)$$

$$=۱۶۹\times(-\sin۵۰^\circ)$$

$$=-۱۶۹\times\underbrace{\sin۵۰^\circ}\xrightarrow{\text{MBMتقریب}}=-۱۶۹\times۰/۷۶\simeq-۱۲۸/۴۴$$

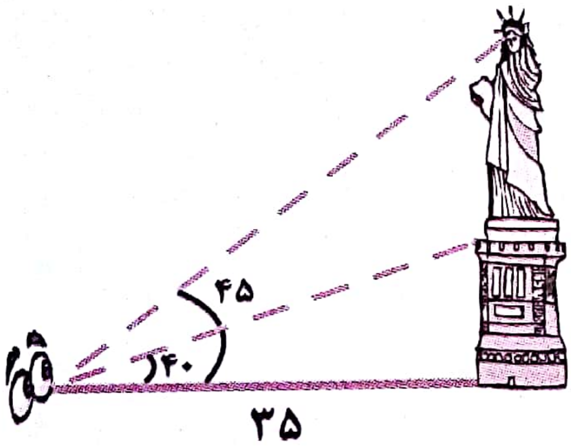
جواب را به صورت تقریبی و سریع برابر ۱۲۸- تخمین زدیم. با نگاهی سریع به گزینه‌ها می‌توانیم در کمال آرامش گزینه‌ی «۱» را انتخاب کنیم.

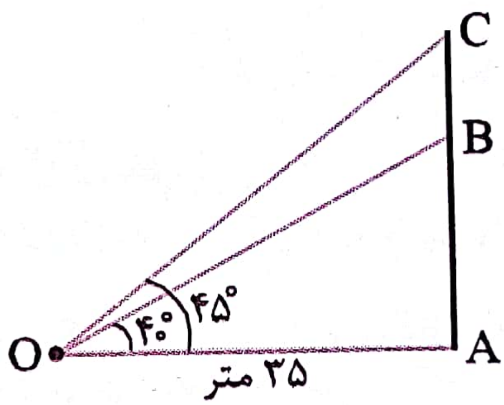
تست ۱۰۳ کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۴

ناظری به فاصله‌ی ۵۳ متری از پای ستونی که بر روی آن مجسمه‌ای قرار دارد، ایستاده. زاویه رؤیت انتها و ابتدای مجسمه با سطح افق ۴۵° و ۴۰° است. ارتفاع مجسمه کدام است؟ $(\tan۴۰^\circ=۰/۸)$

۱) ۶ ۲) ۶/۴ ۳) ۷ ۴) ۷/۲

حل: این ساده‌ترین نوع از مسأله‌های مثلث‌بندی یا حل مثلث است که با هم یاد گرفتیم. طراح بالجبار مجبور شده که به خواننده‌گان بگه $\tan ۴۰^\circ = ۰/۸$ در نظر بگیرین. (چیزی که من و شما احتیاجی به اون نداریم.)





کافیــه طول AB را پیدا کنیــم و از AC کم کنیم تا BC یا همان ارتفاع مجسمه به دست بیاد.

$$\overset{\triangle}{OAB}: \tan ۴۰^\circ = \frac{AB}{OA} \Rightarrow AB = OA \times \tan ۴۰^\circ = ۳۵ \times ۰/۸ = ۲۸$$

$$\overset{\triangle}{OAC}: \tan ۴۵^\circ = \frac{AC}{OA} \Rightarrow AC = OA \times \tan ۴۵^\circ = ۳۵ \times ۱ = ۳۵$$

$$\Rightarrow BC = \text{طول مجسمه} = ۳۵ - ۲۸ = ۷\ \text{متر}$$

پاسخ گزینه‌ی «۳» می‌شه.

تست ۱۰۹ کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۴

جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan ۳x = \frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۶}$ ۲) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$

۳) $\frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۸}$

حل: $k = ۰$ رو در گزینه‌ها قرار میدیم و گزینه‌ها رو کنترل می‌کنیم.

$$۱) -\frac{\pi}{۱۶} = -۱۱/۲۵ \Rightarrow \frac{۱-(\tan(-۱۱/۲۵))}{۱+\tan(-۱۱/۲۵)} = \tan(۳\times(-۱۱/۲۵))$$

$$= \frac{۱-(-۰/۲)}{۱+(-۰/۲)} = \frac{۱/۲}{۰/۸} \neq -۰/۶۶ \text{ غ ق ق}$$

$$\tan(-۱۱/۲۵) \simeq -۰/۲$$

$$\tan(-۳۳/۷۵) \simeq -۰/۶۶$$

$$۲) +\frac{\pi}{۱۶} = ۱۱/۲۵ \Rightarrow \frac{۱-\tan ۱۱/۲۵}{۱+\tan ۱۱/۲۵} = \tan(۳\times ۱۱/۲۵)$$

$$= \frac{۱-۰/۲}{۱+۰/۲} = \frac{۰/۸}{۱/۲} = \frac{۸}{۱۲} = ۰/۶۶ \text{ ق ق}$$

$$\tan ۱۱/۲۵ = ۰/۲$$

$$\tan ۳۳/۷۵ = ۰/۶۶$$

$$۳)\ \frac{-\pi}{۸}=-۲۲/۵^\circ \Rightarrow \frac{۱-\tan(-۲۲/۵^\circ)}{۱+\tan(-۲۲/۵^\circ)}=\tan(۳\times(-۲۲/۵^\circ))$$

$$=\frac{۱-(-۰/۴)}{۱+(-۰/۴)}=\frac{۱/۴}{۰/۶}\neq -۲/۴ \text{ غ ق ق}$$

$$\tan(-۲۲/۵)\simeq -۰/۴$$

$$\tan(-۶۷/۵)=-۲/۴$$

$$۴)\ \frac{\pi}{۸}=۲۲/۵^\circ \Rightarrow \frac{۱-\tan(۲۲/۵^\circ)}{۱+\tan(۲۲/۵^\circ)}=\tan(۳\times(۲۲/۵^\circ))$$

$$=\frac{۱-۰/۴}{۱+۰/۴}=\frac{۰/۶}{۱/۴}=\frac{۶}{۱۴}\neq ۲/۴ \quad \text{غ ق ق}$$

$$\tan ۲۲/۵=۰/۴$$

$$\tan ۶۷/۵=۲/۴$$

گفتم می‌تونین معادلات رو هم حل کنین.

تست ۱۱۱ کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۴

حاصل عبارت $\sin(\cos^{-۱}(\frac{۳}{۵})+\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵}))$ برابر کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۷}{۲۵}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۷}{۲۵}$

حل: می‌دونیم $\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵})=\pi-\cos^{-۱}(\frac{۴}{۵})$.

Scanned by CamScanner

اول سریع $\cos^{-1}(\frac{۴}{۵})$ رو تخمین می‌زنیم. $\frac{۴}{۵}=۰/۸$

$$\left.\begin{array}{l}\cos ۴۰^\circ = ۰/۷۶ \\ \cos ۳۰^\circ = ۰/۸۶\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با تقریب چشمی}} \cos ۳۷^\circ$$

$$= ۰/۸ \Rightarrow \cos^{-1}(۰/۸) = ۳۷^\circ$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}(-۰/۸) = ۱۸۰^\circ - ۳۷^\circ = ۱۴۳^\circ$$

حالا $\cos^{-1}(\frac{۳}{۵})$ رو حساب می‌کنیم. $\frac{۳}{۵}=۰/۶$

$$\left.\begin{array}{l}\cos ۵۰^\circ = ۰/۶۴ \\ \cos ۶۰^\circ = ۰/۵\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با تقریب چشمی}} \cos ۵۳^\circ = ۰/۶$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}(۰/۶) = ۵۳^\circ$$

$$\Rightarrow \sin(۵۳^\circ + ۱۴۳^\circ) = \sin(۱۹۶^\circ) = \sin(۱۸۰ + ۱۶^\circ)$$
$$= -\sin(۱۶^\circ) \simeq -۰/۲۶$$

گزینه‌ها رو نگاه می‌کنیم. گزینه‌ی (۲) برابر $\frac{-۷}{۲۵} \simeq -۰/۲۸$ خودش رو به ما معرفی می‌کنه!

حالشو ببرین.

تست ۱۲۸ کنکور سراسری تجربی ۹۴

حاصل عبارت $\frac{\cos ۲۸۵^\circ - \sin ۲۵۵^\circ}{\sin ۵۲۵^\circ - \sin ۱۰۵^\circ}$ با فرض $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$ کدام است؟

۱) $\frac{-۱۶}{۹}$ ۲) $\frac{-۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱۶}{۹}$

حل: طراح برای دیگر شرکت‌کنندگان محترمی که مثلثات سریع به‌روش MBM رو بلد نیستن! مجبور شده بگه که $\tan ۱۵^\circ = ۰/۲۸$. چیزی که ما بهش اصلاً احتیاجی نداریم. شروع می‌کنیم و توابع داده شده رو با دانش MBM سریع تخمین می‌زنیم.

$\cos ۲۸۵^\circ \simeq ۰/۲۵$, $\sin ۲۵۵ \simeq -۰/۹۶$

$\sin ۵۲۵^\circ \simeq ۰/۲۵$, $\sin ۱۰۵ = ۰/۹۶$

حل به روش MBM

$$\frac{۰/۲۵ - (-۰/۹۶)}{۰/۲۵ - ۰/۹۶} = ?$$

گزینه‌ها:

۱) $\frac{-۱۶}{۹} = -۱/۷$ ۲) $\frac{-۹}{۱۶} = -۰/۵۶$

۳) ۰/۵۶ ۴) ۱/۷

حتی یک باکتری تک‌سلولی هم می‌تونه تشخیص بده گزینه‌ی (۱) درسته.

جان من خوشتون اومد!
$$\Rightarrow \frac{۱/۲}{-۰/۷} = \frac{-۱۲}{۷} \simeq -۱/۷۱$$

تست ۱۳۳ کنکور سراسری تجربی ۹۴

اگر $\tan\beta = \frac{۱}{۲}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{۴}$، مقدار $\sin ۲\alpha$ کدام است؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۸

حل: شروع می‌کنیم. ابتدا سریع تخمین می‌زنیم تانژانت چه زاویه‌ای برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شه.

$$\left.\begin{array}{l}\tan ۲۰^\circ \simeq ۰/۳۶ \\ \tan ۳۰^\circ = ۰/۵۸\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تقریب چشمی}} \tan^{-۱}(۰/۵) \simeq ۲۶^\circ \Rightarrow \beta = ۲۶^\circ$$

حالا مقدار α رو راحت حساب می‌کنیم.

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \alpha \simeq ۴۵^\circ + ۲۶^\circ \Rightarrow \alpha = ۷۱^\circ \Rightarrow ۲\alpha \simeq ۱۴۲^\circ$$

حالا کافیه $\sin ۱۴۲^\circ$ رو تخمین بزنیم.

$$\sin ۲\alpha \simeq \sin ۱۴۲^\circ \simeq \sin ۳۸^\circ \simeq ۰/۶۱$$

با قدرت و جسارت، در کمال شجاعت و در عین متانت گزینه‌ی (۲) رو انتخاب می‌کنیم.

موفق باشید

تست کنکور **حاصل عبارت ....**

صبـــر کنید ببینم! مگه قراره من همه‌ی تســـت‌های کنکورهای سال‌های گذشته و آینده رو براتون حل کنم؟!

اونم الان که شما خودتون یه پا استاد شدید!

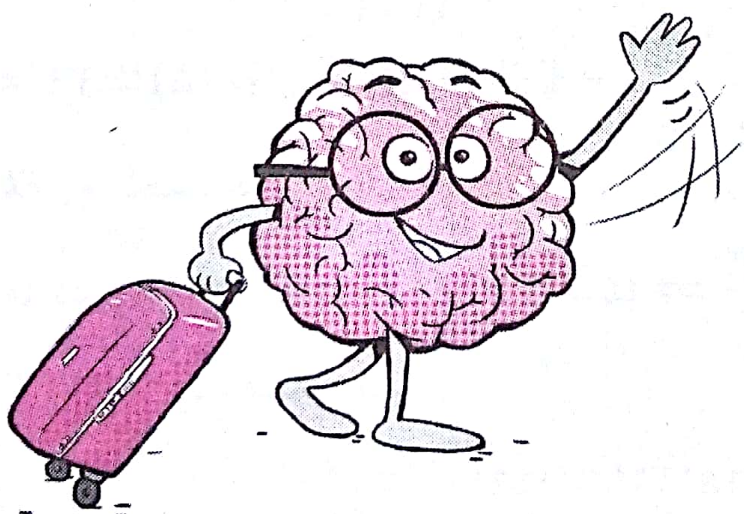
یه نقس عمیق بکشـــید، عینک MBM رو تمیز کنید و به چشم مبارکتون بزنید.

خب حالا خودتون می‌تونین بقیه تست‌های کنکورهای سال‌های گذشـــته و آینده رو به راحتـــی حل کنید. (این عینکه چقدر هم برازنده‌ی شماست. مبارکتون باشه.)

با آرزوی موفقیت و شادکامی شما عزیزان

دوستدار همیشگی شما

مصطفی باقری



تکنیک های

مثلثات سریع

مهندس مصطفی باقری

مهروماه