مختصری از مفاهیم اساسی و ابتدائی

احصائیه و احتمالات

گردآورنده: انجنیر حمیدالله آرین

۱۳۹۸

احصائیه و احتمالات

انجنیر حمیدالله آرین

STATISTICS AND PROBABILITIES

مختصری از مفاهیم اساسی و ابتدائی

احصائیه و احتمالات

گردآوری و حروفچینی: انجنیر حمیدالله آرین

نام کتاب: احصائیه و احتمالات

نویسنده: انجنیر حمیدالله آرین

دور چاپ: چاپ اول

سال چاپ: خزان 1398

طرح و تایپ: انجنیر حمیدالله آرین

ناشر: گروه آموزشی رهنمای ساینس

قیمت: 130 افغانی

بسم الله الرحمن الرحیم

هدف اصلی تمام تحقیقات جهان باید کشف نظم منطقی جهان باشد که خداوند در آن گذارده و آن را به زبان ریاضیات بر ما آشکار ساخته است.

(یوهانس کپلر)

هانری پوانکاره در مورد زیبایی ریاضیات این گونه می‌گوید:

دانشمند، طبیعت را به خاطر فایده‌اش مطالعه نمی‌کند، آن را برای این مطالعه می‌کند که از آن لذت می‌برد و چون طبیعت زیباست از آن لذت می‌برد . اگر طبیعت زیبا نبود، ارزشِ شناختن نداشت و اگر طبیعت ارزش شناختن نداشت، زندگی هم ارزش زیستن نداشت. البته، من در اینجا از آن گونه زیبایی که حواس را متأثر می‌کند، یعنی از زیبایی اوصاف و ظواهر، سخن نمی‌گویم؛ نه به این جهت که این زیبایی‌ها را دست کم بگیرم، نه چنین نیست، اما این زیبایی ربطی به علوم ندارد، منظورم زیبایی ژرف‌تری است که از نظم هماهنگ اجزا بوجود می‌آید و تنها هوشِ ناب قادر به درک آن است.

فهرست

عناوین .... صفحه

فصل اول

احصائیه و مفاهیم اساسی آن 1
ثایت و متحول 1
جدول‌های احصائیوی 1
جامعه و نمونه 2
سرشماری 3
متحول‌های تصادفی و انواع آن 3
روش‌های جمع‌آوری دیتاها 4
جدول کثرت 4
توزیع فریکوینسی‌های متراکم و نسبی 6
اوسط کمیات 8
ارایه گرافیکی توزیع کثرت 10
میانه 13
مد 13
ساحه تحول 15
کارتیل، دیسیل و پرسانتیل 15
معیارهای پراگندگی 16
ضریب تغییرات 18
انحراف چارک‌ها 18
مقایسه شاخص‌های منحنی نارمل 19
شاخص‌ها 20
جامعه‌های چند متحوله 21
کوواریانس 21

تمرینات حل شده 22

فصل دوم

ست‌ها 26
ارایه ست‌ها 26
عملیات ست‌ها 26
ست اعداد 27
احتمالات و مفاهیم اساسی آن 30
شمارش منطقی 30
اصل ضرب در شمارش 30
اصل جمع در شمارش 31
ترتیب‌ها 31
تبدیل‌ها 32
ترتیب با حروف مکرر 33
تبدیل یا ترتیب با حروف مکرر 33
تبدیل‌های دایروی 34
ترکیب 34
تبدیل‌های مرکب 35
ترکیب‌های مرکب 35
ترکیب تعمیم یافته 36
چانس 36
احتمال 36
مفهوم احتمال 38
حادثه‌ی تصادفی 38
فضایی نمونه 39
فضای نمونه‌ی گسسته و پیوسته 39
حاصل ضرب دیکارتی 40
پیش‌آمدهای تصادفی 40
عملیات بر روی پیش‌آمدها 41
خواص احتمال 42
احتمال دو جمله‌یی 43

پیش‌آمدهای ساده 45
احتمال در فضاهای پیوسته 46
احتمال مشروط 48
قانون ضرب احتمالات 50
قانون بیئز 50
احتمال مستقل 54
متحول تصادفی 55
تابع احتمال 55
توزیع برنولی 58
توزیع احتمال دوجمله‌یی 59
نکات مهم! 60
تمرینات حل شده 61

فصل سوم

موضوعات مهم در احتمالات و احصائیه 64
گراف پراگندگی 64
همبستگی و ضریب آن 64
معادلهٔ خطی 64
خط ریگریسیون 66
توزیع احتمال پواسن 68
توزیع نورمال 69
خصوصیات توزیع نورمال 69
مساخت تحت منحنی و استندرد کردن آن 71
قیمت لیمت مرکزی 72
نمونه‌گیری 73
روش‌های نمونه‌گیری تصادفی 73
روش‌های نمونه‌گیری غیرتصادفی 74
توزیع اوسط نمونه 74
توزیع نمونه نسبت 76
سوالات حل شده 77
سوالات بخش آزمون کانکور 82

فصل اول

احصائیه و مفاهیم اساسی آن

احصائیه که کلمه معادل آن در لاتین status است، به معنی حالت، وضع یا موقعیت می‌باشد. کلمه احصائیه یک کلمه عربی است که معنی لغوی آن آمار و شمارش مسایل حیاتی و گاهی شمردن می‌باشد. اما در اصطلاح علم ارقام و یا وسیله مطالعه در ساخت و بافت خصوصیات یک جامعه رو به انکشاف وانمود می‌کند.

بصورت عموم احصائیه علم یا مجموعه از طریقه‌های علمی است به غرض:

1- جمع آوری, خلاصه و ترتیب نمودن اعداد و معلومات؛
2- ارایه نمودن معلومات و اعداد؛
3- مطالعه و تحلیل اعداد و معلومات؛
4- نتیجه گیری, تفسیر، و تعبیر اعداد و معلومات؛
5- اخذ تصامیم نظر به اعداد و معلومات تحلیل شده می‌باشد.

احصائیه بصورت عموم به دو شکل احصائیه توصیفی و احصائیه استنباطی تقسیم می‌شود.

ثابت و متحول

اصطلاح ثابت به آن صفاتی اطلاق می‌شود که در همه افراد به یک اندازه وجود داشته باشد مانند این که تمام افراد دارای دو پا هستند, اما اصطلاح متحول به آن صفاتی گفته می‌شود که در افراد یک جامعه متفاوت باشد مانند جنس، سن، رنگ و غیره متحول های اند که افراد یک اجتماع بر حسب آن‌ها از همدیگر فرق دارند.

جدول های احصائیوی

عبارت از ترتیب نمودن و منظم ساختن سیستماتیک اعداد و معلومات است، در مورد یک جدول احصاییوی نکات ذیل را در نظر میگیریم.

1. عنوان
2. منابع و مأخذ
3. یادداشت‌ها و پا ورقی‌ها
4. ستون‌ها و قطارهای جدول
5. مجموعه

6. ترتیب نمودن معلومات

مثال: تولیدات سوختی کشور طی سال های 1390 – 1385 هـ ش را جدول بندی می‌کنیم:

تولیدات مواد سوختی طی سالهای 1390 – 1385 هـ ش / رقم به هزار تن					
شماره	سال ها	چوب	ذغال سنگ	تیل	گاز
1	1385	50	67	100	200
2	1386	50	68	200	210
3	1387	60	70	200	235
4	1388	120	80	190	250
5	1389	70	53	220	260
6	1390	100	70	227	190
مجموعه		450	408	1137	1345
مأخذ: سالنامه احصاییوی سال 1390 یادداشت: // // // // // // // // // // // //					

جامعه و نمونه

در یک بررسی مجموعه همه افراد و یا اشیایی که از آن‌ها [1] اطلاعات مورد نیاز را دریافت می‌کنیم جامعه نامیده می‌شود. هرگاه اطلاعات از همه افراد جامعه بدست آریم این عمل را رای پرسی همگانی می‌گویند، بعضی اوقات به دلیل مشکلاتی چون کمبود وقت مشکلات اقتصادی و... مجبور هستیم فقط اطلاعات بخشی از اعضای جامعه را بدست بی‌آوریم.

نمونه بخشی از اعضای جامعه است که خاصیت و صفات کل جامعه را دارا می باشد مانند نمونه برنج از یک بوجی برنج و غیره ...

بخاطر شناخت جامعه، نمونه‌یی را که از آن جامعه انتخاب می‌کنیم باید نمونه تصادفی باشد، روش انتخاب نمونه باید گونه-یی باشد که:

- انتخاب هر فرد به عنوان عضوی از نمونه امکان پذیر باشد.
- پیش از انتخاب نمونه نتوانیم در مورد مشخصات آن قضاوت کنیم.

[1] **جمع آوری معلومات را در مورد یک موضوع بنام اطلاعات یاد می‌کنند.**

سرشماری

اگر تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرند، درن عمل را سرشماری می‌نامند. معمولا در سرشماری با مشکلاتی مواجه هستیم که مهم‌ترین آن‌ها قرار زیر است:

- در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه؛
- وقت‌گیر بودن دسترسی به تمام اعضای جامعه؛
- قیمت تمام شدن بررسی تمام اعضای جامعه؛
- و از بین رفتن جامعه در برخی از مطالعات.

متحول‌های تصادفی و انواع آن

اگر اطلاعات جمع آوری شده از موضوع مورد مطالعه از یک عضو جامعه به عضو دیگر قابل پیش بینی نباشد موضوع را متحول تصادفی می‌نامند. به صورت مختصر اطلاعات جمع آوری شده در مورد یک موضوع را متحول‌های تصادفی می گویند.

متحول های تصادفی دو نوع اند:

1- **متحول‌های کمی:** برخی از اطلاعات را می‌توان با عدد بیان کرد این دسته را متحول‌های کمی یا عددی می گویند.
2- **متحول‌های کیفی:** در صورتی که اطلاعات را توصیف و بدون عدد بیان کنیم متحول‌ها را کیفی یا توصیفی و یا غیر عددی می‌گویند. متغیرهای کیفی را به دو بخش ترتیبی و اسمی تقسیم می‌کنند. اگر ترتیب به صورت طبیعی و یا ترتیب عام‌شمول وجود داشته باشد آن را متحول ترتیبی می‌نامیم. متغیرهای مانند رنگ چشم، گروه خونی، غذاهای مورد علاقه و ... از جمله مثال‌های متغیرهای اسمی هستند.

یادداشت: متحول‌های کمی به دو نوع پیوسته و مجزا تقسیم می‌شوند طوری که هرگاه نتوانیم بین دو واحد پشت سر هم، عددی پیدا کنیم آن را کمی مجزا و اگر بین دو واحد پشت سرهم بتوانیم عددی را پیدا کنیم آن را کمی پیوسته می-نامند.

مثال: سه متحول تصادفی را نام بگیرید که بتوان با شمارش و سه متحول تصادفی را نام ببرید که بتوان با اندازه گیری و سه متحول تصادفی دیگری را دریافت کنید که بتوان با توصیف در مورد آن‌ها سخن گفت.

کمی مجزا	کمی پیوسته	کیفی
تعداد اعضای یک خانواده	طول قد شاگردان	رنگ چشم شاگردان
تعداد صنف های مکتب	درجه حرارت شهر ما	میزان سود کارگران
تعداد موترهای که از سرک می‌گذرند	وزن گاو ها	موقعیت یک هنرمند بین علاقه مندان

روش‌های جمع‌آوری دیتاها

- از طریق پرسش؛
- از طریق ثبت و مشاهده‌ی وقایع؛
- از طریق انجام آزمایش.

یادداشت: دیتای خام عبارت از دیتای احصائیوی است که بالای آن هیچ عملیه‌یی صورت نگرفته باشد.

جدول کثرت

تکرار وقوع یک حادثه را بنام کثرت یا فریکوینسی یاد می‌کنند و در هر بررسی با منظم کردن دیتاها (گزارش‌ها) جدولی تشکیل می‌گردد که آن را بنام جدول کثرت یاد می‌کنند.

مجموع کثرت دیتاها در یک نمونه برابر با کل دیتاها با تعداد اعضای نمونه می‌باشد. اگر F1 کثرت دیتای اول، F2 کثرت دیتای دوم ... Fn کثرت دیتای n – ام باشد تعداد کل دیتاها قرار ذیل است:

$$n = F1 + F2 + \ldots + Fn$$

مثال: مقدار مواد سالانه دکان‌ها قرار ذیل داده شده است طوریکه فریکوینسی آن را به f نشان می‌دهیم:

چوپ خط‌ها	دکان‌ها (f)	مفاد ماهانه
	13	1000 – 2125
	10	2125 – 3250
	11	3250 –4375
	14	4375 – 5500

تکرار هر دیتا را کثرت مطلق آن دیتا در جدول کثرت یاد می‌کنند.

بعضی از مفاهیم و اصطلاحات جهت استفاده بهتر از جدول فریکوینسی (کثرت)

- **کلاس:** فاصله تعیین شده بین دو عدد عبارت از کلاس است.
- **حدود کلاس :** هر کلاس دارای دو حد است که بنام های حد بالای و حد پایینی یاد می‌شوند.
- **وسعت کلاس (دامنهء تغییرات):** تفاوت بین حد بالای و حد پایینی یک کلاس را وسعت کلاس می‌نامند.
- **سرحدات کلاس:** هر کلاس دارای دو سرحد است (سرحد پایینی که کمترین مقدار یک کلاس را تشکیل می-دهد و سرحد بالای که بیشترین مقدار یک کلاس را تشکیل می‌دهد. طوریکه:

$$\frac{\text{حد پایینی} + \text{حد بالای}}{2} \quad \text{و سرحد بالای} = \frac{\text{حد بالای} + \text{حد پایینی}}{2}\text{سرحد پایینی} =$$

- **وسط کلاس:** برای یکسان نشان دادن هر دسته یا کلاس از عددی که اوسط هر دسته است استفاده می‌شود.
- **فریکوینـسی کلاس:** عبارت از اعداد و مشاهداتی است که به یک کلاس ارتباط می‌گیرد.
- **فاصله یک کلاس (طول دسته):** عبارت است از تفاوت حد پایینی و حد پایینی کلاس ماقبل کلاس مورد نظر.
- **تعیین تعداد دسته‌ها:** تعیین تعداد دسته‌ها زیادتر به قضاوت تحلیل‌گر مربوط است؛ اما در بعضی موارد می‌توان از فورمول سترجی استفاده نمود.

$k = 1 + 3.33 \log N$

k تعداد دسته‌ها

N تعداد اقلام و مشاهدات

یادداشت: کم‌ترین مقداری که می‌تواند در یک دسته قرار گیرد سرحد پایینی و مقداری را که به شکل بیشترین قرار گیرد را سرحد بالایی می‌نامیم. تعداد دیتاهای که می‌تواند در یک کلاس یاد دسته قرار گیرد بنام طول کلاس نامگذاری می‌کنیم. برای پیدا کردن طول دسته کافی است تفاوت بین دو سرحد بالای دو دسته متواتر را دریافت کنیم.

مثال: نمره امتحان مضمون ریاضی قرار ذیل خلاصه شده است اوسط هر دسته را دریافت کنید.

وسط دسته	تعداد شاگردان	نمرات ریاضی
$\frac{0+49}{2}=24,5$	4	0 – 49
$\frac{50+59}{2}=54,5$	2	59 – 50
$\frac{60+69}{2}=64,5$	7	69 – 60
$\frac{70+79}{2}74\ ,5$	10	79 – 70
$\frac{80+89}{2}=84,5$	9	89 – 80
$\frac{90+100}{2}=90$	8	100 – 90

مثال: در جدول فوق طول دسته اول، دوم و سوم را دریابید.

طول دسته اول = 50 – 0 = 50

طول دسته دوم = 60 – 50 = 10

طول دسته سوم = 70 – 60 = 10

ضرور نیست دسته ها با هم برابر باشند، طول دسته بستگی به این دارد که به خاطر کدام مطلب دسته بندی صورت گرفته است و چه اطلاعاتی را می‌توان بدست آورد.

توزیع فریکوینسی‌های متراکم و نسبی

فریکوینسی نسبی یک کلاس عبارت از نسبت فریکوینسی همان کلاس بر مجموع فریکوینسی همه کلاس‌ها بوده که اگر کثرت نسبی را ضرب 100 کنیم کثرت نسبی فیصدی حاصل می‌شود.

کثرت تجمعی یا متراکم یک دسته یا کلاس برابر کثرت مطلق آن دسته و دسته های ماقبل آن است که به دو شکل متزائید و متناقص می‌باشد.

مثال: در یک امتحان نمرات دو صنف در جدول زیر آورده شده است این دو صنف را باهم مقایسه کنید:

کثرت مطلق	صنف ب	کثرت مطلق	صنف الف	
19	10 – 30	6	10 – 30	ضعیف
25	30 – 50	10	30 – 50	متوسط
16	50 – 70	4	50 – 70	خوب

حل: جدول تعداد این شاگردان دو صنف با هم برابر نیستند بنا کثرت نسبی این دو صنف را دریافت نموده هر دو صنف را باهم مقایسه می کنیم.

کثرت نسبی $=\frac{\text{فریکوینسی کلاس اول}}{\text{مجموع فریکوینسی ها}}$

فیصدی کثرت نسبی	کثرت نسبی	کثرت مطلق	نمرات
صنف الف			
فیصدی کثرت نسبی	**کثرت نسبی**	**کثرت مطلق**	**نمرات**
٪30	6/20	6	10 – 30
٪50	10/20	10	30 – 50
٪20	4/20	4	50 – 70
صنف ب			
فیصدی کثرت نسبی	**کثرت نسبی**	**کثرت مطلق**	**نمرات**
٪ 31,6	19/60	19	10 – 30
٪ 41,6	25/60	25	30 – 50
٪ 26,6	16/60	16	50 – 70

مثال: یک کارخانه اعلان داشت که اگر تولیدات آن دچار مشکل باشد خریداران می‌توانند اشیا را دوباره به کارخانه غرض ترمیم مسترد کنند. جدول زیر نشان دهنده‌ی تعداد کالای که پس از فروش برای ترمیم مسترد شده را نشان می‌دهد.

کثرت تجمعی هر دسته را مشخص کنید.

دسته ها	کثرت مطلق	کثرت تجمعی
10 – 13	3	3
13 – 16	6	6 + 3 = 9
16 – 19	7	9 + 7 = 16
19 – 22	4	16 + 4 = 20

اوسط کمیات

مفاهیمی را تحت عنوان اوسط‌های حسابی، هندسی، مربعی، و هارمونیک را بنام معیارهای تمرکز یاد می‌کنند که ذیلا مورد مطالعه قرار می‌گیرند:

1–**اوسط حسابی:** اوسط حسابی عبارت است از حاصل جمع کمیات تقسیم بر تعدادشان.

$$Ma = \overline{x} = \frac{x1 + x2 + \cdots + Xn}{n} = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} xi$$

مثال: اوسط حسابی بین اعداد 10، 20 و 30 را بدست بیاورید.

$$Ma = \overline{x} = \frac{30 + 20 + 10}{3} = 20$$

2- **اوسط هندسی** : اوسط هندسی عبارت است از حاصل ضرب کمیات زیر جذر تعداد آن‌ها. اوسط هنددسی کیمات دایم کوچکتر از اوسط حسابی آن‌ها است، بجز زمانی که کمیت‌ها مساوی باشند باهم.

$$\text{Mg} = \sqrt[n]{x1 \,.\, x2 \ldots\ xn}$$

مثال: اوسط هندسی بین اعداد 90 ، 45 . 180 را دریابید.

$$\text{Mg} = \sqrt[3]{180 \,.45 \,.90} = 90$$

3- **اوسط هارمونیکی:** اوسط هارمونیکی یا توافقی n کمیت قرار ذیل تعریف میگردد:

$$Mh = \frac{n}{\frac{1}{x1} + \frac{1}{x2} + \cdots + \frac{1}{xn}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{xn}}$$

مثال: اوسط هارمونیکی سه عدد 2، 4 و 8 را دریافت کنید.

$$Mh = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = 3{,}43$$

4- **اوسط مربعی:** جذر المربع اوسط حسابی مربعات چند عدد، اوسط مربعی آن‌ها گفته می‌شود.

$$Ms = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ \dots\ x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

مثال: اوسط مربعی اعداد 3، 4 و 5 را دریافت کنید.

$$Ms = \sqrt{\frac{3^2 + 4^2 + 5^2}{3}} = \sqrt{\frac{50}{3}}$$

اوسط وزنی

اگر دیتا با ضریب خاصی بیان شده باشند، به این معناست که تاثیر دیتا یکسان نبوده، بستگی به ضریب آن دارد. در این حالت در جدول کثرت ضریب‌ها به عنوان کثرت آن دیتا به حساب آمده و به W نشان داده می‌شود. اوسط بدست آمده در این حالت را اوسط وزنی می‌نامیم.

$$\overline{X_W} = \frac{W_1X_1 + W_2X_2 + \cdots + W_nX_n}{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}$$

مثال: در بعضی از دانشگاه‌ها نمرات بر حسب نمره‌های حروفی مانند: A, B, C اعلان می‌شود. در این دانشگاه A دارای قیمت 4، B دارای قیمت 3 و C دارای قیمت 2 است. محصلی نمرات زیر را کسب نموده است. اوسط نمرات این دانش‌جو چند است؟

مضمون	نمره	تعداد کریدت‌ها	اوسط نمره عددی	اوسط وزنی
ریاضیات	B	3	3	9
فزیک	C	2	2	4
کیمیا	A	3	4	12

$$W\overline{X}=\frac{9+12+4}{8}=\frac{25}{8}=3.125$$

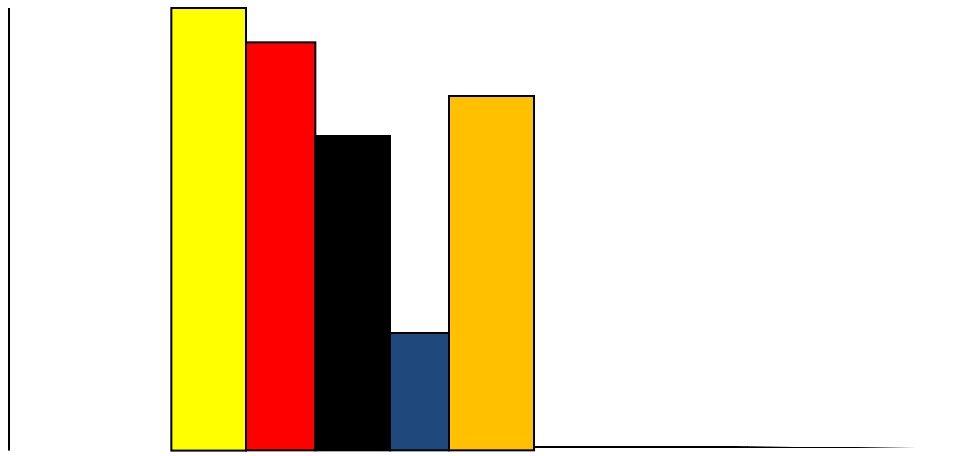
ارایه گرافیکی توزیع کثرت

ارایه گرافیکی توزیع کثرت به پنج شکل ذیل صورت می‌گیرد:

1. هستوگرام
2. بارچارت
3. منحنی پالگن
4. گراف دایروی
5. گراف ساقه و برگ

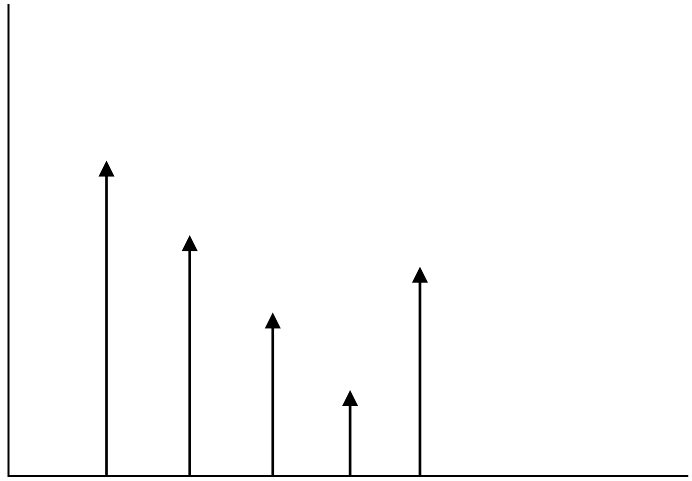
1–**هستوگرام**

هستوگرام متشکل از یک تعداد مستطیل‌ها است، طوری که پایه این مستطیل‌ها، کلاس‌های مربوطه را و ارتفاع مستطیل‌ها کثرت های یک توزیع را نشان می‌دهد در نظر داشته باشد که در محور X کلاس‌ها نشانی شده و در محور Y فریکوینسی نشانی می‌شود.



2- بارچارت

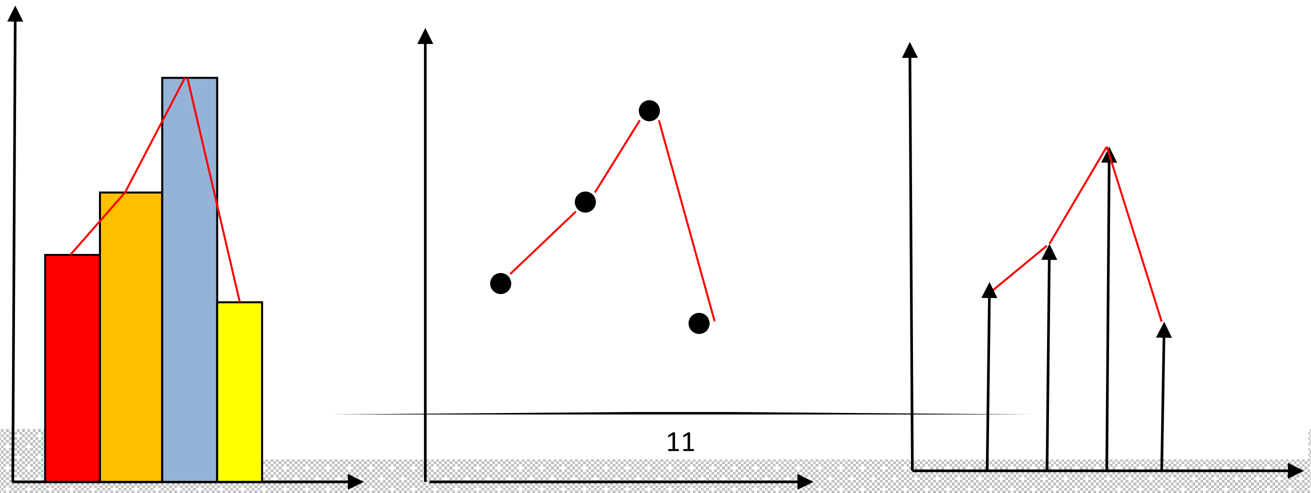
متشکل از یک تعداد خطوط مستقیم عمودی بالای محور X است، طوریکه پایه این خطوط وسط این کلاس ها را نشان می دهد و بلندی این خطوط فریکوینسی های مربوط را، در محور X نقطه وسطی کلاس ها و در محور y فریکوینسی های مربوطه نشانی نی شوند مثلا در شکل ذیل.



3–منحنی پالگن

در رسم نمودن منحنی پالگن باید نقطه وسطی کلاس ها در محور x نشانی گردد، این گراف به سه شکل ذیل رسم می‌شود:

a. این که نقاط وسطی کلاس‌ها در یک هستوگرام با هم وصل کنیم.
b. یا این که انتهایی خطوط مستقیم را در یک بارچارت با هم وصل کنیم.
c. و یا هم این که بشکل نقطه گذاری با در نظر داشت نقاط وسطی کلاس و کثرت های مربوطه، نقاط را نشانی نموده منحنی پالگن را رسم کنیم.

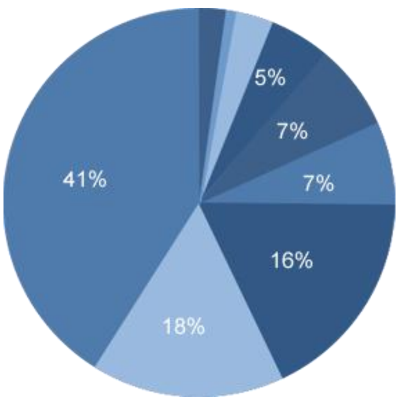


4–گراف دایروی

در گراف دایروی با در نظر داشت متحولین شامل در جدول مساحت دایره متناسب به زوایای مرکزی به قسمت‌های مختلف منقسم می‌گردد، در این نوع گراف فکتور های احصائیوی با همدیگر بدرستی مقایسه شده می‌توانند.

برای کشیدن گراف دایروی یک کثرت دایره‌یی را به شعاع اختیاری به وسیله زاویه مرکزی به n قسمت تقسیم می کنیم، به قسمی که اندازه زاویه مرکزی هر یک از این قسمت‌ها متناسب به کثرت آن قسمت باشد در این صورت زاویه مرکزی نظر به دسته اول عبارت است از:

$$\text{کثرت برحسب درجه} = \frac{\text{کثرت دیتاها}}{\text{تعداد کل دیتاها}} \times 360$$



5–گراف ساقه و برگ

برای ارسم این گراف از اعداد استفاده می‌شود، دیتای احصائیوی بصورت اعداد درآورده و سپس از این اعداد گراف ساقه و برگ را تشکیل می‌دهیم، این گراف برای دیتای که تفاوت کوچکتر و بزرگتر دیتا از نظر رقم‌ها اندک باشد، مناسب است.

مثال: در یک کتاب فروشی 20 نوع کتاب که تعداد هر کدام در جدول ذیل ذکر گردیده است موجود است، گراف ساقه و برگ را برای این دیتا ترسیم کنید.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	52	57	58	65	65

ساقه	برگ
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6

2 7 8	5
5 5	6

میانه Median

برای پیدا کردن میانه در مرحله اول دیتا Data را منظم کرده سپس:

- اگر تعداد دیتا تاق باشد میانه دیتاها، دیتای وسطی خواهد بود.
- اگر تعداد دیتاها جفت باشد، اوسط دو دیتای وسطی میانه می‌باشد، و یا به عبارت دیگر میانه اعداد مرتب X1 + X2 + X3+ . . . Xn عبارت از $Md = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}} + 1\ )$ می‌باشد.

مثال: در آمد ماهانه خانواده‌یی بر حسب افغانی قرار ذیل داده شده است. میانه دیتا را دریابید.

10000 7000 6000 4000 3000

می‌بینیم که تعداد دیتاها تاق است و عدد 6000 در وسط قرار دارد پس مدیان یا میانه آن 6000 است.

مثال: میانه دیتای ذیل را دریابید.

2, 4,3 ,6 ,9 , 10

چون دیتای فوق دارای تعداد جفت است، پس اوسط حسابی دو دیتای وسط یعنی 4 و 6 را مدیان یا میانه دیتا می-گویند.

مد Mode

مد یک کلمه‌ی فرانسوی است و به ویژه‌گی گفته می‌شود که بیشترین تکرار را داشته باشد. هر آن دیتای که بیشترین کثرت را دارد مد نامیده می‌شود. گاهی امکان آن وجود دارد که یک دیتا بیشتر از یک مد داشته باشد. دلیل این که یک ست از دیتاهای احصائیوی دارای دو مد است، این است که دو توزیع مختلف با هم ادغام شده‌اند. مثلا ممکن است کمربندهای مردانه و بچه‌گانه باهم یک مجموعه دیتا را تشکیل دهند. همچنان یک ست از دیتاهای احصائیوی می‌تواند مد نداشته باشد، این موضوع زمانی ممکن است که تمام عناصر دیتا یک بار تکرار شده باشد.

مثلا در نمرات مضمون تاریخ یک شاگرد صنف دهم در طول شش سال گذشته برابر است با:

71 ,91 ,81 ,81 ,70 ,100

مد نمرات این شاگرد 81 است.

محاسبه تقریبی مد از جدول توزیع فریکوینسی

در یک جدول توزیع فریکوینسی مد در طبقه‌ی خواهد بود که دارای بیشترین فریکوینسی باشد. اصطلاحا به این طبقه، طبقه‌ی مد می‌گویند که از رابطه‌ی $\text{mod} = L + (\frac{d_1}{d_1 + d_2})c'$ بدست می‌آید.

در این فورمول L حد پائین طبقه است که مد در آن قرار دارد، d_1 اختلاف فریکوینسی طبقه‌ی که مد در آن قرار دارد با طبقه‌ی ماقبل آن است. d_2 اختلاف فریکوینسی بین فریکوینسی‌های طبقه‌ی که مد در آن قرار دارد و طبقه‌ی مابعد آن است. c' عرض تقریبی طبقه است.

مثال: در جدول توزیع فریکوینسی معاش کارمندان مرد، مد را محاسبه کنید.

طبقه	فریکوینسی
4.0 – 6.0	9
6.0 – 8.0	31
8.0 – 10.0	54
10.2 – 12.0	45
12.0 – 14.0	27
14.0 – 16.0	23
16.0 – 18.0	14
18.0 – 20.0	9
20.0 – 22.0	4
	216 (مجموعه)

$$\text{mod} = 8.0 \cdot (\frac{23}{9+23} \cdot 2 = 9.3$$

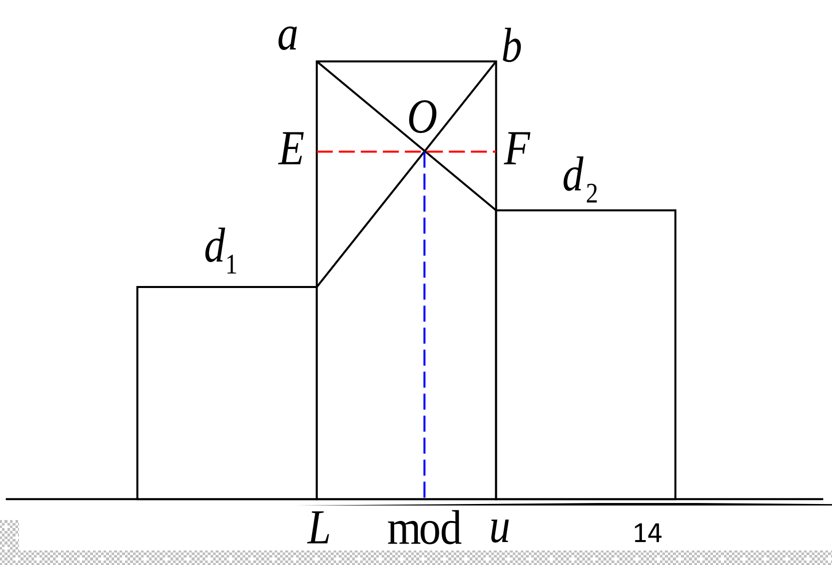
$d_1 = 54 - 31 = 23$

$d_2 = 54 - 45 = 9$

$L = 8.0$

$c' = 2$

کمیت تقریبی مد را به صورت هندسی نیز می‌توان بدست آورد، به شرط آن که هستوگرام توزیع مورد نظر را رسم کرده و به کمک آن به روش زیر فورمول مد را محاسبه کرد.



ساحه تحول Range

طول فاصله‌ای که متحول در آن امکان تغیر را دارد را بنام ساحه تحول یاد می‌کنند، این معیار، وسعت بین بیشترین و کمترین دیتا Data را نشان می‌دهد.

مثال: نمرات امتحان یک شاگرد قرار ذیل است ساحه تحول نمرات آنرا پیدا کنید.

20, 21, 25, 32, 33, 35, 37, 38, 39

ساحه تحول = 29 – 20 = 19

کارتیل، دیسیل و پرسانتیل

1- **کارتیل (چارک‌ها):** کارتیل‌ها ارزش‌های مرکزی هستند که یک سلسله را به 4 قسمت مساوی تقسیم نموده اند و هر قسمت آن برای ما معلومات می‌دهد. یا به عبارت دیگر طوری اعداد یک دیتای مرتب را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند آن‌ها را چارک‌های اول، دوم و سوم مینامند.

- چارک اول مقدار است که 25٪ دیتای جامعه پایین آن 75 ٪ بالاتر قرار می‌گیرد.
- چارک دوم مقداری است که 50 ٪ دیتای جامعه پایین‌تر از آن و 50 ٪ بالای آن قرار می‌گیرند.
- چارک سوم مقداری است که 75 ٪ دیتای جامعه پایین‌تر از آن و 25 ٪ دیتا بالای آن قرار می‌گیرد.

Q3
Q2
Q1

برای محاسبه کردن چارک‌ها مراحل ذیل را در نظر بگیرید:

1. دیتا را به طور صعودی مرتب کنید.
2. دیتای مرتب شده را از 1 تا n شماره گذاری کنید.

3. محل p – ام (p = 1, 2, 3 ...) با استفاده از فورمول ذیل بدست میآوریم:

$$CQp = \frac{pn}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: دیتایی طور زیر داده شده است:

100, 90, 80, 120, 160, 140, 85

- چارک اول و سوم را محاسبه کنید.
- اعداد قبل از میانه را بنویسید.
- اعداد بعد از میانه را بنویسید.

1	2	3	4	5	6	**7**
80	85	90	100	120	140	**160**

$$CQ1 = \frac{1.7}{4} + \frac{1}{2} = 4 \;\rightarrow\; CQ1 = 100$$
$$CQ2 = \frac{3.7}{4} + \frac{1}{2} = 5{,}75 \;\rightarrow CQ3 = 135$$

اعداد قبل از میانه 90, 85 و 80

اعداد بعد از میانه 100, 120, 140, 160

2- **دهک‌ها (دیسیل‌ها):** دیسیل‌ها ارزش‌های مرکزی هستند که یک سلسله را توسط 9 نقطه به 10 حصه مساوی تقسیم نموده اند و از هر حصه آن به ما معلومات می‌دهد.

3- **صدک‌ها (پرسانتیل‌ها):** عبارت از ارزش‌های هستند که یک سلسله را توسط 99 نقطه به 100 حصه مساوی تقسیم می‌کنند که از هر حصه آن برای ما معلومات می‌دهد.

معیارهای پراگندگی

مفاهیمی مانند اوسط انحراف، واریانس، و احراف معیاری را معیارهای پراگندگی می‌گویند که طور ذیل به مطالعه آن‌ها می-پردازیم.

اوسط انحراف

هرگاه اوسط حسابی اعداد $x_1,\ldots\ldots,x_n$ عبارت از X' باشد اوسط انحراف اعداد مذکور قرار ذیل است:

$$MD = \frac{1}{n}(|x_1 - X'| + |x_2 - X'| + \ \ldots\ |x_n - X'| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - X'|$$

مثال: اوسط انحراف اعداد 45, 40, 35 را محاسبه کنید.

$$X' = \frac{1}{3}(35 + 40 + 45) = 40$$

$$MD = \frac{1}{3}(|35 - 40| + |40 - 40| + |45 - 40| = 3\frac{1}{3}$$

واریانس

هرگاه اوسط حسابی اعداد $X_1, X_2, \ldots X_n$ عبارت از X' باشد در این صورت واریانس اعداد مذکور عبارت است از:

$$Var\ = \frac{1}{n}[\ (x_1 - x')^2 +\ (x_2 - x')^2 +\ \ldots + (x_n - x')^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x')^2}{n}$$

مثال: واریانس دیتای ذیل را با استفاده از فورمول حساب کنید.

9 ,7 , 6 ,5 ,1

$$X' = \frac{1}{5}(\ 1 + 5 + 6 + 7 + 9) = 5{,}6$$

$$Var = \frac{1}{5}[(\ 1 - 5{,}6)^2 +\ (\ 5 - 5{,}6)^2 + (6 - 5{,}6)^2 + (7 - 5{,}6)^2 + (9 - 5{,}6)^2 = 7{,}04$$

یادداشت: اگر دیتای دسته بندی شده با مرکز دسته‌های $X_1, X_2, \ldots X_n$ و با کثرت های $f_1, f_2, \ldots f_n$ داده شده باشند, برای محاسبه بهتر است از فورمول ذیل استفاده شود.

$$Var = \sum_{i=1}^{n}\frac{fi(x_i - x')^2}{n}$$

انحراف معیاری

جذرالمربع واریانس اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را بنام انحراف معیاری آن‌ها یاد می‌کنند.

$$\delta = \sqrt{Var} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{fi(x_i - x')^2}{n}}$$

مثال: درجه حرارت بدن 5 مریض 38, 39, 39, 40, 41 است انحراف معیاری آن‌ها را محاسبه کنید.

$$\delta = \sqrt{\frac{(38-39{,}4)+(39-39{,}4)+(39-39{,}4)+(40-39{,}4)+(41-39{,}4)}{5}} = \sqrt{\frac{5{,}2}{5}} = 1{,}01980$$

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات CV عبارت از نسبت بین انحراف معیاری بر اوسط است که عدد مطلق بدون واحد می‌باشد.

$$CV = \frac{s}{x}$$

اگر ضریب تغییرات به 100 ضرب شود ضریب تحول بدست می‌آید.

$$CV\% = \frac{s}{x}100$$

- ضریب تغییرات را فقط برای دیتای مثبت تعریف می‌کنیم.
- اگر همه دیتاها برابر باشند، ضریب اغییرات صفر است.
- اگر همه‌ی دیتا را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، ضریب تغییرات، تغییر نمی‌کند.
- اگر به همه‌ی دیتا یک عدد مثبت را اضافه کنیم، ضریب تغییرات جدید، کوچکتر از ضریب اغییرات دیتای اولیه است.

مثال (1): ضریب تغییرات دیتای زیر را محاسبه کنید.

1　3　5

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = 2.67$$

$$S = \sqrt{2.67}$$

$$CV = \frac{S}{\overline{x}} = \frac{\sqrt{2.67}}{3} = 0.543$$

مثال (2): اگر اوسط برابر 4 و انحراف معیاری برابر 6 باشد، ضریب تغییرات چقدر است؟

$$CV = \frac{S}{\overline{x}} = \frac{6}{4} = 1.5$$

انحراف چارک‌ها

انحراف چارک‌ها از 25٪ معلومات از شروع و از 25٪ در ختم صرف نظر می‌کند و از 50٪ معلومات در وسط به ما معلومات ارائه می‌کند.

چارک اول – چارک سوم = انحراف چارک‌ها

Q = Q3 – Q1

مثال: انحراف چارک‌های اعداد ذیل را بدست آورید.

35 ,29 ,30 ,31 ,25 ,24 ,23 ,22 ,20 ,22 ,36

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36

$$CQ3 = \frac{3.11}{4} + \frac{1}{2} = 8{,}75 \qquad CQ1 = \frac{1.11}{4} + \frac{1}{2} = 22{,}25$$

$$Q = Q3 - Q1 = 30{,}75 - 22{,}25 = 8{,}5$$

انحراف وسطی

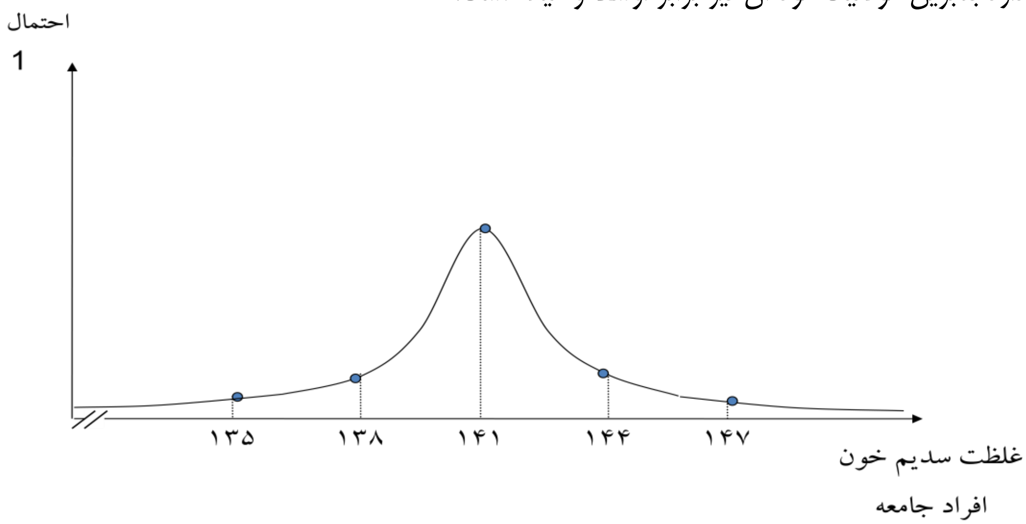
عبارت است از اوسط حسابی انحراف یا تفاوت مطلقه اعداد یک سلسله نظر به ارزش مرکزی مثلا اوسط حسابی یا میدیان می‌باشد.[۲]

[2] مقایسات انحراف پاگندگی: انحراف به صورت عموم به دو شکل ارئه می‌شود:

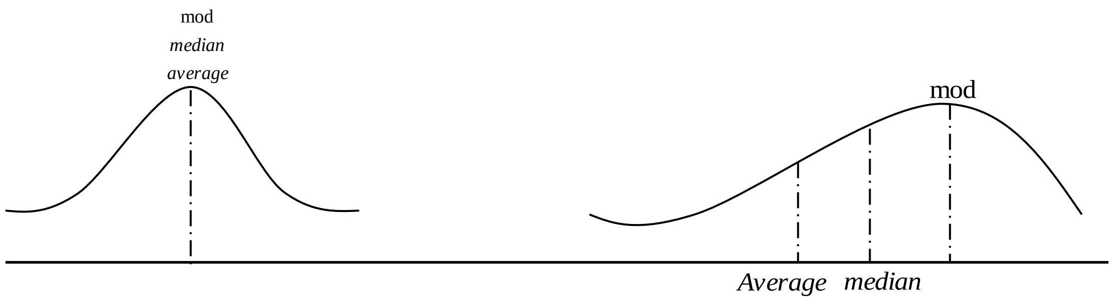
1. انحراف مطلقه: به همان واحدهای اولی افاده می‌شود مانن: کیلوگرام, متر و ...

$$MD = \frac{\sum|x - x'|}{n}$$

مقایسه شاخص‌های مرکزی منحنی نارملمنحنی نارمل یکی از منحنی‌های معروف در احصائیه است که اکثر پدیده‌های طبیعی را می‌توان توسط آن نمایش داد که موقعیت میانه و اوسط در منحنی نارمل یکسان است. و چون منحنی نارمل نقطه اعظمی دارد بنابرین موقعیت مود آن نیز برابر اوسط و میانه است.



- در توزیع‌های یک نواخت که منحنی نورمال آن شکل منظم دارد، سه شاخص مرکزی با هم منطبق اند.
- زمانی که در منحنی نورمال کشیدگی به طرف چپ باشد، مد به سمت راست میانه و میانه به سمت راست اوسط خواهد بود. (و برعکس این موضوع اگر کشیدگی به سمت راست باشد.)



اگر منحنی نارمل متناظر نباشد در اینصورت داریم که:

- اگر اوسط میانه مساوی باشند، تعداد دیتایی که قبل و بعد از اوسط و میانه قرار دارند مساوی می‌باشند.

2. انحراف نسبی: در شکل نسبت‌ها یا فیصدی‌ها ارئه می‌شود.

- اگر اوسط در سمت چپ معادله باشد، تعداد دیتای که در سمت راست اوسط قرار دارند از دیتایی سمت چپ بیشتر است.

شاخص‌ها

یک عدد شاخص یا اندکس نمبر که در این جا به طور مختصر شاخص یا اندکس یاد می‌کنیم. شاخص عبارت از یک مقیاس احصائیوی است که تغییرات را در یک متحول یا در چند متحول مربوط، نظر به زمان، موقعیت جغرافیایی و خصوصیات دیگری مانند عایدات، مصرف، تخصص، ترکیب و غیره نشان می‌دهد.

شاخص‌های توزیع نارمل

شاخص‌های توزیع نارمل را می‌توان در دو حالت زیر مطالعه کرد:

1. **شاخص خمیدگی:** توزیعی که در اطراف اوسط متناظر نباشد خمیدگی گفته می‌شود که توسط دو ضریب یعنی ضریب خمیدگی که برای تعین میزان خمیدگی بکار می‌رود از ضریب خمیدگی پیرسون استفاده می‌شود.

$$\text{ضریب خمیدگی} = \propto = \frac{\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{x_i} - \mathrm{x}')^3}{S^3}$$

$$\text{ضریب پیرسون} = \frac{3(\bar{x} - \mathrm{med})}{S}$$

در توضیحاتی که منحنی نورمال متناظر باشد، یعنی شکل منظم را داشته باشد، ضریب کجی پیرسون صفر خواهد بود در صورتی که ضریب کجی پیرسون کوچکتر از صفر و یا بزرگتر از صفر باشد، نشان دهنده‌ی این است که منحنی متناظر نیست.

2. **شاخص کشیدگی:** شاخص کشیدگی نشان می‌دهد که یک توزیع چه وقت دارای اوج و چه وقت دارای پخشی است.

$$\text{شاخص کشیدگی} = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - x')}{S^4}]$$

اگر جدول کثرت را داشته باشیم پس فورمول شاخص کشیدگی شکب زیر را به خود می‌گیرد:

شاخص کشیدگی= $\dfrac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$

جامعه‌های چند متحوله

یکی از اهداف عمده در اکثر تحقیقات احصائیوی پیشبینی نمودن و تعیین یک متحول از جنس متحول دیگر است. زمانی که بین دو شی ارتباط مورد بررسی قرار می‌گیرد منظور از جامعه دو متحوله می‌باشد. مثلا رابطه بین حجم و فشار گاز، ارتباط بین صحت و میزان مرگ و میر و ...

کوواریانس: برای نمونه n عنصر که به شکل جوره‌های مرتب از قیمت‌های معلومات نوع $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ مطابقت می‌نمایند. کوواریانس طبق تعریف از رابطه‌ی $\vartheta xy = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_1 - \bar{y})}{N}$ پیدا می‌شود.

تمرینات حل شده

1. اگر طول قد یک گروه ده نفری برحسب سانتی متر قرار ذیل بدست آمده باشد فریکوینسی عدد 177 را دریافت کنید.

183	158	177	176
187	177	190	177

جواب: 3

2. میانه و وسعت ست A= (21, 19, 17,19, 19) را دریابید.

A= (21, 19, 17, 19, 19)
A= (17, 19, 19, 19, 21)
Md= 19
Range = 21 – 17 = 4

3. اوسط حسابی اعداد 73 , 89, 69 را دریافت کنید.

$$X' = \frac{69 + 89 + 73}{3} = 77$$

4. اوسط هندسی اعداد 4 و 9 را دریافت کنید.

$$Mg = \sqrt[2]{9 \times 4} = 6$$

5. اوسط مربعی اعداد 12, 3 و 4 را محاسبه کنید.

$$Mq = \sqrt{\frac{4^2 + 3^2 + 12^2}{3}} = \sqrt{56,3}$$

6. واریانس و انحراف معیاری اعداد 10, 20 و 15 را دریافت کنید.

$$X' = \frac{1}{3}(10 + 20 + 15) = 15$$

$$Var = \frac{1}{n}[(10 - 15)^2 + (20 - 15)^2 + (15 - 15)^2] = 16,6$$

$$\sqrt{Var} = \sqrt{16,6}$$

7. کثرت نسبی را تحت یک فورمول ارائه دارید.

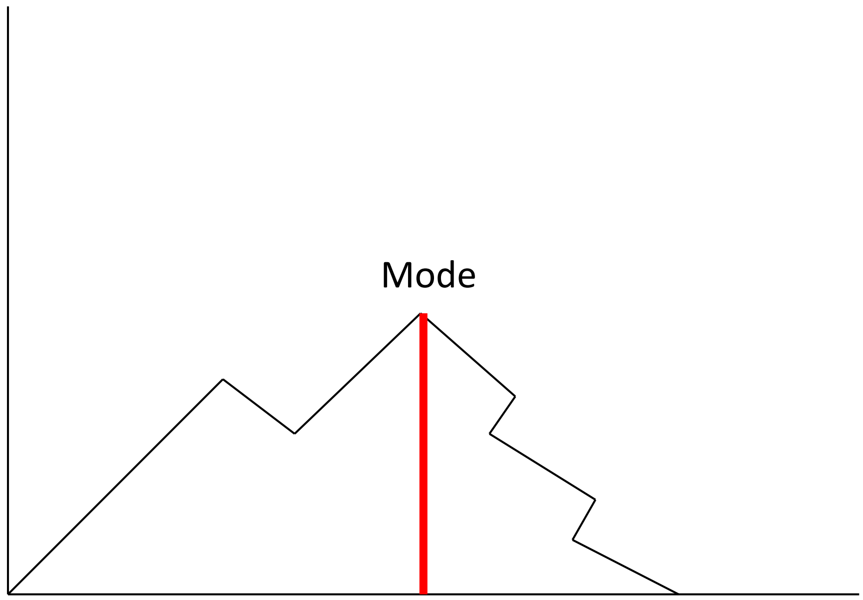
$$\text{کثرت نسبی} = \frac{\text{کثرت مطلق}}{\text{کثرت کل دیتاها}}$$

8. نمرات امتحان مضمون هندسه یک شاگرد صنف دوازدهم در طول هفت سال گذشته قرار ذیل است مد نمرات آنرا پیدا کنید.

71 ,91 ,81 ,70 ,91 ,5 ,91

جواب: مد نمارت شاگرد مذکور 91 است.

9. در گراف ذیل محل تقریبی مد را پیدا کنید



10. نمرات امتحان سالانه احمد در جدول زیر داده شده است اوسط نمرات وی را دریافت کنید.

92	62	85	82	75	93	86	76	71	73

$$\frac{92+62+85+82+75+93+86+76+71+73}{10} = 79{,}5\%$$

11.فرض کنید دیتای بدست آمده قرار ذیل داده شده باشد

100	90	80	120	160	140	85

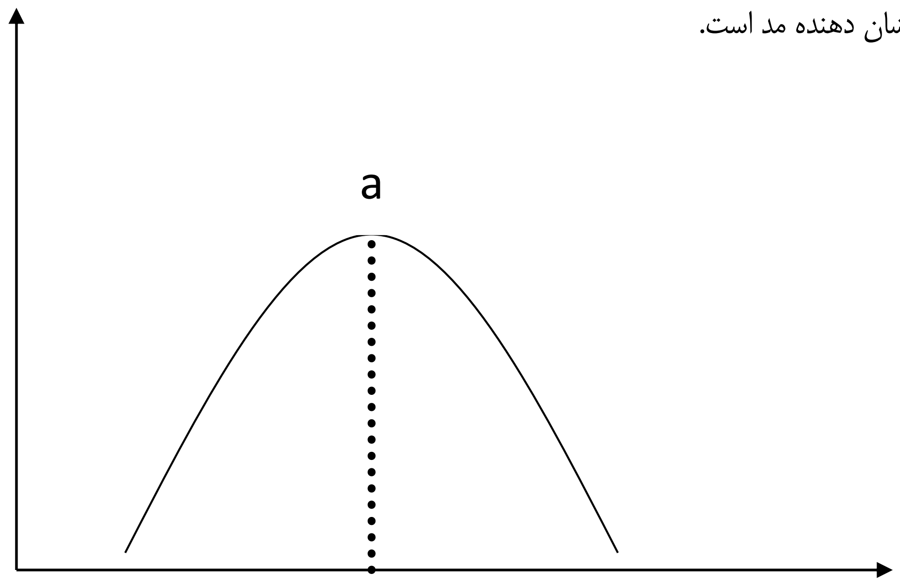
چارک اول و سوم را بدست آورید.

1	2	3	4	5	6	7
80	85	90	100	120	140	160

$$Q1 = \frac{1.7}{4} + \frac{1}{2} = 2{,}25 = 87$$
$$Q3 = \frac{3.7}{4} + \frac{1}{2} = 5{,}75 = 135$$

12. در گراف ذیل نقطه a چی را نشان می‌دهد؟

جواب: نقطه a نشان دهنده مد است.



13. گراف ذیل چگونه یک گراف است؟

وزن بعد از رژیم غذایی	وزن اولیه(به اساس کیلوگرام)	شماره خرگوش ها
8	1	1
3	2	2
7	1	3

جواب: یک جامعه دو متحوله را نشان می‌دهد.

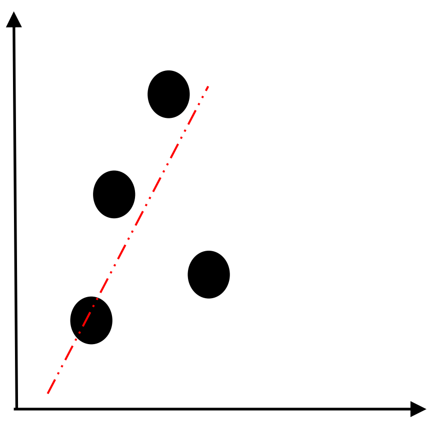
14.گراف تصویری چگونه یک گراف است؟

جواب: گاهی برای دانستن اطلاعات داده شده از سمبول ها و اشکال استفاده می‌شود که این روش را بنام گراف تصویری یاد می‌کنند.

15.اگر اوسط برابر 4 و انحراف معیاری 6 باشد ضریب تغییرات چقدر خواهد بود؟

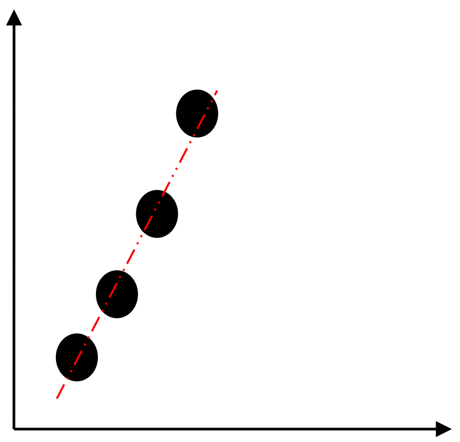
$$CV = \frac{6}{4} = 1,5$$

16. شکل گراف‌های ذیل دارای چگونه ضریب همبستگی هستند؟



این گراف ضریب همبستگی پایین دارد

زیرا نقاط روی یک خط مستقیم قرار نگرفته



این گراف ضریب همبستگی بلند دارد

زیرا نقاط روی یک خط مستقیم قرار گرفته

فصل دوم

ست ها(set)

ست عبارت از مجموعه‌ی اشیا است و یا به صورت واضح‌تر ست عبارت از اشیای خوب تعریف شده است. نظریات ست‌ها در سال‌های (1845–1918) توسط جورج کانتور در علم ریاضیات داخل گردید.

$A=\{x/1 \leq x \leq 4\}$

A={1,2,3,4}

ارایه ست ها: ست‌ها به صورت عموم به سه شکل ذیل ارایه داده می‌شوند:

1) **طریقه اجمالی:** در این طریقه عناصر یک ست توسط عبارت بیان می‌شود، طوری که عناصر در بین قوس { } ذکر می‌گردد مانند:

A= {ویروس ها}

B= {کامپیوتر ها}

2) **طریقه تفصیلی:** در این روش عناصر یک ست به ،صورت مستقیم و یا سمبولیک ارایه می‌شود مانند:

$A = \{A, B, C, D, E\}$

$B = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$

3) **طریقه الجبری:** به اساس این طریقه یک ست توسط سمبول‌های الجبری ارایه می‌شود مانند:

$D = \{ X: X^n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$

$AUB = \{ X/X \in A, X \in B\}$

عملیات ست ها

1) **ست‌های مساوی:** عبارت از ست‌های هستند که دارای عین تعداد عناصر باشند.

$A = (a, m, 3) \quad B = (3, a, m) \quad A = B$

2) **ست‌های معادل:** عبارت از ست‌های هستند که تعداد عناصر آن‌ها مساوی باشد.

$A = (1, 2, a, d) \quad B = (2, n, w, 3) \quad A \equiv B$

3) **ست‌های فرعی یک ست:** عبارت از ستی‌های هستند که تمام عناصر آن‌ها شامل ست دیگری باشد.

$A = (1, 2, 3, m, n) \quad B = (m, 2) \quad B \subset A$

نوت: ست خالی، ست فرعی هر نوع ست است.

هر ست، ست فرعی غیر واقعی خودش است و توسط علامت ⊑ نشان داده می‌شود.

4) **ست طاقت:** عبارت از تعداد ست‌های فرعی یک ست است که توسط فورمول ذیل نشان داده می‌شود.

$N = 2^n$

5) **تقاطع ست‌ها:** ستی است که از عناصر مشتر دو یا چند ست دیگر بوجود آمده باشد.

$A = (2, 1, m, n, a) \quad B = (a, w, 3, 5, 2, 1) \quad A \cap B = (2, 1, a)$

6) **اتحاد ست‌ها:** اتحاد دو ست A و B عبارت از ست سومی است که از عناصر این دو ست تشکیل گردیده باشد و به علامه U نشان داده می‌شود.

$$A \cup B:=\{x/x \in AvX \in |B\}$$

$$A=(a,b,r,c) \quad b=(1,2,3,a)\ A \cup B=(a,b,r,c,1,2,3)$$

7) **ست‌های متناهی و غیرمتناهی:** هرگاه تعداد عناصر یک ست محدود و معین باشد ست را متناهی می‌نامند مانند: ست ماه‌های سال و اگر عناصر آن معیین نباشد آن‌را نامتناهی می‌نامند مانند ست سه عدد طاق.

8) **دو ست جدا از هم (ست‌های مجزا):** در صورتی که دو ست هیچ عنصر مشترک نداشته باشند، به نام ست‌های جدا از هم یاد می‌شوند.

9) **ست کلی:** در یک بحث معین، ست کلی ستی است که عناصر تمام ست‌ها از آن انتخاب می‌شوند و این ست را با حرف U نشان داده می‌شود. مثلا اگر ست اعداد طبیعی را به عنوان ست کلی در نظر بگیریم، در این صورت باید عناصر تمام ست‌ها، ست اعداد طبیعی باشد.

10) **مکملهء یک ست:** ست کلی U و یک ست فرعی اختیاری از آن مثلا A را در نظر می‌گیریم. حال متمم A را نسبت به U که به A^C نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^C=\{x/x \in U, x \notin A\}$$

مثلا اگر U را ست اعداد طبیعی و A را ست اعداد طبیعی تاق در نظر بگیریم، آنگاه مکمله‌ی A که به A^C نشان داده می‌شود عبارت از ست اعداد طبیعی جفت است.

11) **تفاضل دو ست:** تفاضل دو ست A و B که به شکل $A-B$ نمایش داده می‌شود، ستی است که عناصر آن متعلق به A باشد، اما متعلق به B نباشد؛ یعنی:

$$A-B=\{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

- یادداشت:
- A^C و A از هم مجزا اند.
- مکمله ست کلی خالی، ست کلی است.
- اگر دو ست با هم مساوی باشند، مکمله‌های آن‌ها نیز با هم مساوی اند.
- مکملهء مکملهء یک ست عبارت از خود آن ست است.
- $A-B=A \cap B^C$
- اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B^C \subseteq A^C$
- $A \cap A^C=\phi$

- $A\bigcup A^{C}=\phi$

قضایای اساسی در ست‌ها	
1) دو ست A و B مساوی اند، اگر و تنها اگر $A\subseteq B \wedge B\subseteq A$ باشد	2) اگر $B\subseteq C$ و $A\subseteq B$ در آن صورت $A\subseteq C$ است.
3) اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$، آنگاه $A\bigcup B\subseteq C$	4) $A\bigcap\phi=\phi$ است.
5) $A\bigcap A=A$ است.	6) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ است.
7) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$	8) قانون دمورگان: $(A\bigcap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$

ست اعداد

1) **ست اعداد طبیعی:** اعداد این ست برای شمارش بکار می‌روند.

$$\text{Natural (IN)} = (1,2,3,4,5\ldots)$$

2) **ست اعداد کامل:** اعداد این ست از اتحاد ست اعداد طبیعی و صفر بوجود می‌آید.

$$(\text{CO}) = (0,1,2,3\ldots)$$

3) **ست اعداد تام (Z):** عبارت از تمام اعداد سالمی است که در روی محور اعداد نشان داده می‌شوند.

4) **ست اعداد نسبتی** (Q) **:** ستی که تمام عناصر ان به شکل $\frac{a}{b}$ در حالیکه $b\neq 0$ و $a,b\in \mathrm{Z}$ باشد در آورده شده بتوانند، اعداد نسبتی نامیده می‌شوند.

$$\mathrm{Q} = (a/b: a,b\in \mathrm{Z} \text{ و } b\neq 0)$$

5) **ست اعداد غیر نسبتی:** عبارت از اعدادی هستند که به شکل $\frac{a}{b}$ ارایه شده نتوانند. و به سمبول Q' نشان داده می‌شوند.

مانند$(\pi, e, 7\sqrt{5\ldots})$

$$\pi = 3{,}14\ldots\ldots$$

$$e = 3,7181 \ldots.$$
$$\sqrt{2} = 1.444 \ldots$$

6) **ست اعداد حقیقی:** اعدادی شامل این ست متشکل از اتحاد تمام اعداد نسبتی و غیر نسبتی می‌باشد. ست اعداد حقیقی به IR نشان داده می‌دهیم.

$$IR = Q \cup Q$$

7: **ست اعداد موهومی:** عبارت از تمام اعداد منفی زیر جذر جفت می‌باشد.

اعداد موهومی توسط سمبول های ai و i ارائه می‌شوند.

$$\sqrt[2]{-1} = i$$

نمایش ست‌ها

ست ها را به صورت عموم به دو شکل نمایش می‌دهند:

1) بشکل دیاگرام یا شکل 2) بشکل قوس

احتمالات و مفاهیم اساسی آن

احتمالات یک بخش مهم از ریاضیات معاصر را تشکیل می‌دهد که با مطالعه‌ی آن می‌توان از طریق پیش‌بینی حوادث برای آینده برنامه ریزی نمود.

شمارش منطقی

اصول شمارش ضرب، جمع با مفاهیم ترتیب، تبدیل، ترکیب، و خواص‌شان را در این بخش مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

اصل ضرب درشمارش: هرگاه تعداد n عملیه به اشکال P1, P2 ... Pn اتفاق بیفتد، این عملیه‌ها طور هم‌زمان P=P1 . P2 ... Pn شکل مختلف گرفته می‌توانند.

فرض کنید که مدیر یک مکتب متوسطه خصوصی به منظور اخذ تصمیمی در مورد لیسه شدن این مکتب، بیست نفر از استادان خود را به دو گروپ تقسیم نموده است. گروپ «الف» شامل هشت عضو است و قرار است در مورد نتایج مساعد احتمالی لیسه‌شدن مکتب تحقیق به عمل آورند. در گروپ دیگر یعنی گروپ «ب» که متشکل از دوازده عضو است، در مورد نتایج نامساعد احتمالی، بررسی‌هایی را به عمل خواهند آورد. اگر قبل از اتخاذ تصمیم، مدیر مذکور فقط با یکی از اعضا در مورد این تصمیم صحبت نماید، آنگاه بنابر قانون جمع، می‌تواند بیست عضو را احضار کند؛ ولی به منظور قضاوت بی‌طرفانه، مدیر لیسه تصمیم می‌گیرد که روز شنبه یا عضوی از گروپ «الف» و سپس روز یک‌شنبه با عضوی از گروپ «ب» صحبت کند تا به اتخاذ تصمیمی نایل گردد. با به کارگیری اصل زیر، ملاحظه می‌کنیم که او می‌تواند به $12\cdot 8=96$ طریق مختلف دو عضو متعلق بع گروپ‌های دوگانه را انتخاب و با آن‌ها صحبت کند.

مثال (1): در یک مسافرت یک شخص دو جوره بوت، چهار کلاه و 6 نیکتایی با خود دارد. به چند شکل متفاوت می‌تواند لباس‌های خود را بطور همزمان بپوشد.

$P=2.4.6=48$ پس این شخص به 48 شکل متفاوت می‌تواند لباس‌های خود را بپوشد.

مثال(2): در رستورانتی هر شام شامل یک سوپ، یک غذایی اصلی و یک نوشیدنی است. در این رستورانت 3 نوع سوپ، 6 نوع غذایی اصلی و 2 نوع نوشیدنی موجود است. یک مشتری به چند شکل می‌تواند شام خود را انتخاب کند؟

مشتری می‌تواند به $P=3\cdot 6\cdot 2=36$ طریق مختلف غذا فرمایش دهد.

مثال (3): می‌دانیم که رمز کارت‌های ATM چهار رقمی است. حال به غیر از کارت خودتان چند کارت دیگر می‌توانید بسازید، به شرط این که کارت‌ها دارای رمز متفاوت باشند؟

$$P=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10^4=10000$$
$$N=10000-1=9999$$

اصل جمع در شمارش: هرگاه n عملیه مستقل به P1, P2, ... Pn شکل مختلف صورت گرفته بتواند، عملیهء که مقصد آن وقوع یکی از این عملیات باشد به $P = P1 + P2 + \dots Pn$ شکل مختف صورت گرفته می‌تواند.

مثال (1): فرضا در یک الماری سه کتاب فزیک، دوکتاب ریاضی و چهارکتاب کیمیا وجود دارد، در این صورت به چند طرق می‌توان یک کتاب را برای مطالعه انتخاب کرد؟

$$P = 3 + 2 + 4 = 9$$

مثال (2): از چهار نوع تکه (سیاه، سفید، سرخ و سبز) چند بیرق می‌توان ساخت طوری که هر بیرق کمتر از دو رنگ نداشته باشد.

تعداد بیرق‌های دو رنگ $P1 = 4.3 = 12$

تعداد بیرق‌های سه رنگ $P2 = 4\,.\,3.\,2 = 24$

تعداد بیرق‌های چهار رنگ $P3 = 4\,.\,3\,.\,2\,.1 = 24$

تعداد تمام بیرق‌ها $Pt = 12 + 24 + 24 = 60$

مثال (3): از ارقام 2, 4, 6, 8,9 چند عدد سه رقمی یا چهار قمی بدون تکرار می‌توان ساخت؟

$P1 = 5\,.\,4\,.\,3 = 60$ تعداد اعداد سه رقمی

$P2 = 5\,.\,4\,.\,3\,.\,2 = 120$ تعداد اعداد چهار رقمی

$P1 + P2 = 60 + 120 = 180$ تعداد تمام اعداد

مثال (4): تعداد اعداد چهاررقمی طاق و پنج رقمی جفت را که می‌توان با استفاده از اعداد 1,2,3,4,0,8 ساخت، تعیین کنید.

$$\left.\begin{aligned} P(4digit - odd) &= 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360 \\ P(4digit - even) &= 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 4320 \end{aligned}\right\} = 360 + 4320 = 4680$$

ترتیب‌ها

حالات مختلف که n شی طور مرتب پهلوی هم‌دیگر قطار شده می‌توانند، بنام ترتیب‌های مختلف آن‌ها گفته می‌شود و تعداد این ترتیب‌ها عبارت است از:

$$P(n, n) = n!$$

این موضوع را بنام فکتوریل نیز یاد می‌کنند. (فکتوریل عبارت از افاده‌ء است که به شکل حاصل ضرب اعداد مسلسل طبیعی ارائه می‌گردد).

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})(\boldsymbol{n}-\mathbf{3}) \ \ldots \ (\mathbf{3})(\mathbf{2})(\mathbf{1})$$

$$\mathbf{5}! = \mathbf{5}(\mathbf{5}-\mathbf{1})(\mathbf{5}-\mathbf{2})(\mathbf{5}-\mathbf{3})(\mathbf{5}-\mathbf{4})(\mathbf{5}-\mathbf{5})\mathbf{5}! = \mathbf{5}\cdot\mathbf{4}\cdot\mathbf{3}\cdot\mathbf{2}\cdot\mathbf{1} = \mathbf{120}$$

$$\mathbf{1} = !\,\mathbf{0}$$

مثال: حروف A , B , C را به چند شکل مختلف پهلوی هم‌دیگر قرار داده می‌توانیم در صورتی که تکراری وجود نداشته باشد.

$$P(3,3) = 3! = 3.2.1 = 6$$

تبدیل‌ها

حالات متفاوتی که r شی از n شی مختلف در کنار همدیگر مرتب شده می‌توانند، بنام تبدیل‌های n شی به r یاد می-گردد و تعداد آن‌ها عبارت است از:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال (1): از 10 جلد کتاب به چند شکل مختلف 5 جلد آن را در الماری می‌توان مرتب کرد؟

$$P(n\,,r) = \frac{10!}{(10-6)!} = 151200$$

مثال (2): با استفاده از ارقام 7, 9, 3, 1 چند عدد سه رقمی بدون تکرار می‌توان ساخت؟

$$P(\,4\,,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

مثال (3): مدیر یک فروشگاه همه ساله در یکی از روزها دو نفر ا مشتریان خود را به طور تصادفی انتخاب کرده و دو جایزه به ارزش 10000 و 20000 افغانی به آن‌ها می‌دهد. اگر این فروشگاه به طور معمول در روز 30 مشتری داشته باشد، به چند طریق می‌تواند این دو نفر را انتخاب کند؟

$$P\binom{30}{2} = \frac{30!}{(30-2)!} = 870$$

در اینجا ترتیب مهم است، زیرا دو جایزه ارزش‌های متفاوتی دارند.

ترتیب با حروف مکرر

n حرف متمایز را در نظر می‌گیریم و r حرف را از این n حرف را انتخاب می‌کنیم و به اشکالی که ممکن است پهلوی هم قرار می‌دهیم. برخلاف روش قبلی این بار فرض می‌کنیک که هرکدام از حروف را بتوان تکرار کرد. مسئله ترتیب مکرر n حرف r به r است. به عنوان مثال سه حرف a، b و c را در نظر می‌گیریم . می‌خواهیم ترتیب تکراری سه حرف دو به دو را تشکیل دهیم؛ داریم:

$$ab \quad ba \quad ac \quad ca \quad bc \quad cb \quad aa \quad bb \quad cc$$

ترتیب مکرر n حرف r به r را به صورت $P'\binom{n}{r} = n^r$ نشان دهیم. برای مثال بالا با استفاده از این نوع ارائه می‌توان نوشت که:

$$P'\binom{3}{2} = 3^2 = 9$$

مثال: با استفاده از ارقام $4,3,2,1$ و 6 در صورتی که تکرار ارقام مجاز باشد، چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟

$$P' = \binom{5}{3} = 5^3 = 125$$

تبدیل یا ترتیب با حروف مکرر

اگر n حرف را در نظر بگیریم، روی که n_1 حرف آن شبیه به هم، n_2 حرف آن شبیه به هم و ... باشند، تعداد طریقی که می‌توان این n را کنار هم قرار داد، بنام تبدیل با حروف مکرر یاد می‌شود و حالات ممکن به $P'(n)$ نمایش داده می‌شود. مثلا در ترتیب سه حرف a,b و c اگر b و c هر دو معادل x قرار گیرند، آنگاه شش (ترتیب) حروف a,b و c به شکل زیر خواهد بود.

$$xxa \quad xxa \quad xax \quad axx \quad axx$$

که فقط سه تای آن‌ها از یکدیگر متمایزند؛ بنابر این با سه حرف که دوتای آن یکی هستند تعداد $\frac{3!}{2!} = 3$ ترتیب وجود دارد.

به صورت خلاصه فورمول اینگونه ترتیب را $P'(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_t!}$

مثال (1): از کلمه teeth چند نمونه پنج حرفی می‌توان نوشت؟

$$\frac{5!}{2!\ .2!} = 30$$

مثال (2): از 5 عدد 4, 4, 5, 5, و 5 چند عدد پنج رقمی می‌توان تشکیل نمود؟

$$\frac{5!}{3!\ .2!} = 10$$

تبدیل‌های دایروی

هرگاه n شی از روی محیط دایره مرتب شده باشند تعداد ترتیب‌های آن‌ها عبارت است از $(n-1)!$.

مثال: پنج نفر در اطراف یک میز گرد به چند حالت مختلف نشسته می‌توانند؟

$$(n-1)! = (5-1)! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

ترکیب

اگر از یک ست n عنصری، r $(r \leq n)$ عنصر را بدون جابجایی ترتیب کنیم، در این صورت این ترتیب را ترکیب n حرف r به r یاد می‌کنند و به شکل $C\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ و یا C_r^n نمایش داده می‌شود.

اعداد ترکیبی: به اعداد گفته می‌شود که دارای شکل $C\binom{n}{r}$باشد .

- $c\binom{a}{a} = 1$
- $c\binom{a}{0} = 1$
- $c\binom{a}{a-1} = a$
- $c\binom{a}{1} = a$
- $c\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

1- اعداد ترکیبی ذیل را ساده سازید با استفاده ار رابطه ذیل در صورتی که r<n باشد.

$$C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$C\binom{8}{6} = \frac{8!}{6(8-6)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{6\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1} = \frac{3360}{1} = 3360$$

مثال(1): در یک مکتب به تعداد 7 صنف دهم وجود دارد، اداره مکتب می‌خواهد از جمله‌ی هفت اول نمره‌های صنوف دهم به تعداد چهار نفر را انتخاب کند به چند طریق این انتخاب صورت گرفته می‌تواند؟

$$c\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = 35$$

مثال (2): به چند طریق می‌توان از 30نفر محصل، 3 نفر آن را برای شرکت در یک کنفرانس احصائیه انتخاب کرد؟

$$c\binom{30}{3}=\frac{30!}{(30-3)!\cdot 3!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27!}{27!\cdot 3!}=4060$$

مثال (3): به منظور توسعه کورس ریاضیات مجزا، به کمیسیون مشترک از استادان ریاضیات و اقتصاد نیازمندیم. فرض کنید اگر کمیسیون 7 نفری تشکیل دهیم که در آن 3 نفر از استادان ریاضی و 4 نفر از استادان اقتصاد عضویت داشته باشند و هم‌چنان در مجموع استادان ریاضیات 9 نفر و استادان اقتصاد 11 نفر باشند، به چند طریق اعضای این کمیسیون را انتخاب کرده می‌توانیم؟

$$C\binom{9}{3}\cdot C\binom{11}{4}=\frac{9!}{3!(9-3)!}\cdot\frac{11!}{4!(11-4)!}=84\cdot 330=27720$$

تبدیل‌های مرکب

فرض کنید از n عنصر متمایز r دسته را طوری انتخاب کنیم که r_1 عنصر در دسته‌ی اول و r_2 عنصر در دسته‌ی دوم باشد و اگر این عملیه را ادامه دهیم بلاخره r_k عنصر در دسته‌ی rام قرار داشته باشد، و ترتیب انتخاب هر یک از این دسته‌ها تهمیت داشته باشد، به نام تبدیل‌های n شی r به r دسته یاد شده و تعداد آن‌ها را توسط سمبول $P^{n}_{r_1,r_2,\dots,r_k}$ و یا به شکل $P\binom{n}{r_1,r_2,\dots,r_n}$ نشان می‌دهیم.

$$P\binom{n}{r_1,r_2,\dots,r_k}=\frac{n!}{(n-r_1-r_2-\dots-r_k)}$$

ترکیب‌های مرکب

n عنصر متمایز را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم از این n عنصر ترکیبات rتایی بسازیم؛ اما در این rتایی‌ها می‌توان هر یک از عناصر را r بار تکرار کرد. این مسئله را به نام ترکیب مرکب با تکرار عناصر می‌نامیم. حالات ممکنه را به شکل زی می‌توان نوشت:

$$C'\binom{n}{r_1,r_2,\dots,r_k}=\frac{n!}{r_1\cdot r_2\cdot\dots\cdot r_k(n-r_1-r_2-\dots-r_k)}$$

مثال (1): به چند شکل مختلف چهار محصل A,B,C و D را می‌توانند از 20 جلد کتاب مختلف به ترتیب 4,7,6 و 2 کتاب مختلف را انتخاب کنند؟

$$C'\binom{20}{6,7,4,2}=\frac{20!}{6!\cdot 7!\cdot 4!\cdot 2!(20-6-7-4-2)!}=1367553600$$

ترکیب تعمیم یافته

در ترکیب از N شی m تا را انتخاب می‌کردیم. در واقع N شی را به دو گروه m تایی و $N-m$ تایی تقسیم می‌کردیم و $C_m^N = \frac{N!}{m!(N-m)!}$ عبارت بود از تعداد حالات ممکنه برای تقسیم بندی به دو گروه. حال اگر N شی داشته باشیم و بخواهیم آن‌ها را به r گروه $A_1, ...$ و A_r که به ترتیب $m_1, ...$ و m_r عضو داشته باشند $(m_1+...+m_r=N)$ تقسیم کنیم، تعداد حالات ممکنه برابر است به:

$$\binom{N}{m_1, m_2, ..., m_r} = C^N_{m_1, m_2, ..., m_r} = \frac{N!}{m_1, m_2, ..., m_r}$$

مثال: ده توپ داریم. دوتا سرخ، سه‌تا سفید و پنج‌تا سیاه. به چند طریق می‌توان آن‌ها را در یک خط چید؟

$$\binom{10}{2,3,5} = C^{10}_{2,3,5} = \frac{10!}{2!3!5!}$$

چانس

حوادثی که از نگاه عددی می‌توان قابل اندازه نباشد برای آن‌ها از کلمه‌ی چانس استفاده کرد. برای کاربرد کلمه چانس کلمات امکان دارد، امکان ندارد، حتمی است، چانس کمتر، چانس بیشتر، چانس ندارد و غیره را برای پیش‌بینی یک اتفاق استفاده می شود.

مثلا: ممکن نیست انسان مانند یک پرنده پرواز کند.

و یا چانس باریدن باران در بهار ممکن است.

یا چانس آمدن روز بعد از شب حتمی است.

احتمال

هرگاه چانس یک اتفاق با اعداد و ارقام پیش بینی گردد بنام احتمال حادثه اتفاقی یاد می‌گردد طوری که احتمال واقعهٔ ناممکن صفر و احتمال یک واقعهٔ ممکن را یک قبول می‌کنیم. به صورت ریاضیکی؛ به هر واقعه‌ی A عدد $p(A)$ نسبت داده می‌شود به طوری که (اصول کولموگروف):

1) $p(A) \geq 0$ ؛

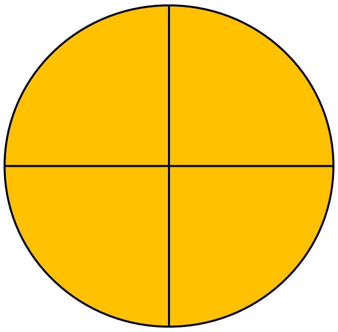
2) $p(\Omega) = 1$ ؛

3) اگر واقعه‌های A و B ناسازگار باشند ($A \cap B = \phi$) آنگاه: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(اصل سوم با تکرار آن برای هر اعداد محدودی از وقایع بیان است، ولی نه برای تعداد نامحدود. اگر عناصر فضای نمونه نامحدود باشند، باید به جای اصل سوم، اصل قوی‌تری را جایگزین کرد).

مانند: احتمال این که یک اسب دو پای داشته باشد صفر و احتمال این که زمین بدور آفتاب می‌چرخد یک است.

مثال: برای انتخاب یکی از رنگ‌ها احتمال هر یک از رنگ‌ها را محاسبه کنید.



1. احتمال این که رنگ نارنجی باشد 50% است زیرا

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$$

2. احتمال این که رنگ زرد باشد 25% است زیرا

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

3. احتمال این که رنگ آبی باشد 25% است زیرا

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

قضیه یک: اگر $\Omega = A \cup \bar{A}$، در این صورت $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ است.

قضیه دوم: اگر $\phi = \bar{\Omega}$، در این صورت $P(\phi) = 0$ است.

قضیه سوم: اگر $\Omega = A \cup \bar{A}$، در این صورت $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \to P(\bar{A}) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq 1$ است.

قضیه چهارم: اگر $B \subset A$ باشد، آنگاه $P(B) \leq P(A)$ است.

قضیه پنجم: اگر $B \subset A$ باشد، آنگاه $P(A - B) = P(A) - P(B)$ است.

قضیه ششم: برای هر دو مجموعه A و B (نه لزوما ناسازگار) داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ است.

قضیه هفتم: در صورتی که مجموعه‌ی A شامل $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ باشد طبق اصل سوم خواهیم داشت که:

$$P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_n)$$

اگر $P(\omega_n)$ را P_i بنامیم، طبق اصل اول باید $P_i \geq 0$ بوده و طبق اصل دوم $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$ باشد. ولی P_iها از هر حیث دیگر اختیاری هستند (در تعریف اصولی). اگر عناصر Ω نامحدود، ولی قابل شمارش باشند، باز هم بحث فوث صادق است. ولی اگر تعداد Ω نامحدود غیرقابل شمارش باشد، مثلا فضایی نمونه‌ی زمان شروع یک مکالمه تلفنی (یا زمان خراب شدن یک ساکت برق)، در اینجا هر فاصله $\{t_1 \leq t \leq t_2\}$ یک واقعه است و $\Omega = \{0 \leq t \leq +\infty\}$. اغلب در چنین مواردی احتمال واقعه‌ی ساده $P\{t = t_i\}$ برابر صفر است، اگر چه Ω احتماع واقعه‌های ساده است.

(اگر چه احتمال واقعه‌ی ناممکن صفر است، اما هر چه احتمالش صفر باشد ناممکن تلقی نمی‌شود.)

مفهوم احتمال

هرگاه برای وقوع یک حادثه، تعداد امکانات مساعد S و تعداد امکانات نامساعد F باشد احتمال وقوع مساعد و نامساعد قرار ذیل خواهد بود.

$$p(s) = \frac{S}{S+P} \quad P(F) = \frac{P}{S+P} \quad => P(S) + P(F) = 1$$

مثال: در تجربه انداختن یک دایس، شش امکان تساوی الاحتمال شماره های 1, 2, 3, 4, 5, 6 آمدن وجود دارد.

الف: اگر جفت آمدن دایس را حاثه اتفاقی A در نظر بگیریم.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ب: وقتی که بزرگتر از 2 بودن حادثه B فرض گردد.

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال: در یک قطی 10 مهره سفید، 5 مهره سیاه و3 مهره سرخ است یک مهره بطور تصادفی از قطی بیرون بکشید.

الف: احتمال مهره سیاه $P(B) = \frac{5}{18}$

ب: احتمال مهره سفید $P(W) = \frac{10}{18}$

ج: احتمال مهره سرخ $P(R) = \frac{3}{18}$

د: احتمال مهره زرد $P(Y) = \frac{0}{18}$

حادثه‌ی تصادفی

یک فعالیت که تا هنوز نتایج آن معلوم نباشد. یا به صورت تصادفی اتفاق افتد بنام تجربه تصادفی یاد می‌گردد. مثلا انداختن یک سکه که نتایج آن به رو یا پشت سکه منجر می‌شود یک تجربه تصادفی است. به عبارت دیگر پدیده‌های که نتیجهء آن قبل از وقوع قابل تشخیص نیستند، به نام پدیده‌های تصادفی یاد می‌شوند و پدیده‌های که ثبل از وقوع نتیجهء آن معلوم باشد، به نام پدیده‌های قطعی نامیده می‌شوند.

آزمایش تصادفی، آزمایشی است که دارای بیشتر از یک نتیجهء ممکن باشد، از این رو وقتی به مرحلهء اجرأ در می‌آید، نمی-توان نتیجهء حاصل را از قبل با قطعیت مشخص کرد. نتیجه‌ی که از انجام یم آزمایش تصادفی حاصل می‌شود را اصطلاحا برآمد گویند.

فضایی نمونه

تمام نتایج ممکن یک تجربه تصادفی را به یک مجموعه یا ست نشان می‌دهیم بنام فضایی نمونه یاد می‌شود. یک فضایی نمونه را معمولا به S نشان می‌دهند.

مثال: دو سکه به صورت همزمان انداخته می‌شوند، اگر T شیر آمدن و H خط آمدن باشد فضائی نمونه آن‌ها قرار ذیل خواهد بود:

حادثه همنوع بودن	**S_1 = {HH, TT}**
حادثه مختلف بودن	**S_2= {HT, TH}**
حادثه دو شیر آمدن	**S_3= TT**
حادثه دو خط آمدن	**S_4= {HH}**
حادثه نه شیر و نه خط آمدن	**S_5 = { }**
حادثه یکی از چهار حالت ممکن	**S_6= {S}**
فضائی نمونه	**S= { HH, TT, TH}**

فضای نمونه‌ی گسسته و پیوسته

همان طوری که دانسته شد فضاهای نمونه یک تجربه اتفاقی عبارت است از مجموعه معین یا محدود، و یا نامعیین و غیر محدود اند که یک دسته‌ی آن‌ها قابل شمارش و دسته دیگر آن‌ها را غیر قابل شمارش می‌نامند. فضای نمونهء که عناصر آن-ها قابل شمارش و تشخیص اند بنام فضای نمونه گسسته و یا غیر متصل و فضای نمونهء که عناصر آن قابل شمارش نیستند بنام فضایی نمونه پیوسته یاد می‌شوند.

مثال: کدام یک از فضا های ذیل پیوسته و کدام یک گسسته است؟

پرتاپ دو دانه رمل (گسسته)	**انتخاب یک عدد حقیقی (پیوسته)**

انتخاب سه ورزش کار از 30 نفر (گسسته)	**انتخاب زاویه بین 30 درجه و 45 درجه(پیوسته)**

احتمال به دو شکل مطالعه می‌گردد:

1. **احتمال تجربی:** احتمالی که توسط انجام تجربه به شکل عملی و یا از روی تعداد نتایج یک تجربه بدست می‌آید، احتمال تجربی نامیده می‌شود.
2. **احتمال نظری:** احتمالی که از روی فضایی نمونه از نسبت حالات مساعد بر تعداد کل حالات یک تجربه بدست می‌آید بنام احتمال نظری یاد می‌گردد.

حاصل ضرب دیکارتی

حاصل ضرب دیکارتی مجموعه A(با αi عنصر) در مجموعه‌ی B (با βj عنصر) عبارت است از مجموعه‌ی تمام زوج‌های مرتب به صورت $(\alpha i\times\beta j)$ و به صورت $C=A\times B$ نشان داده می‌شود.

اگر A، m عضو و B، n عضو داشته باشند، $A\times B$، mn عضو خواهد داشت (ترتیب زوج‌ها باید در نظر گرفته شود).

مثال: حاصل ضرب دیکارتی مجموعه‌ی $A=\{H,T\}$ را در خودش پیدا کنید.

$$C=A\times A=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

تعداد حوادث حاصل ضرب دیکارتی را میتوان توسط فورمول 2^n محاسبه نمود، طوری که n تعداد حوادث شامل مجموعه عمومی $(C=A\times B)$ باشد.

پیش‌آمدهای تصادفی

در انداختن تاس، فضای نمونه ست $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ است. اگر به عنوان مثال در این تجربه، ظاهر شدن یک عدد تاق مورد نظر باشد، ست $A=\{1,3,5\}$ که تمام نتایج مطلوب در این تجربه را نشان می‌دهد، یک پیش‌آمد تصادفی فضای نمونه مورد بحث است. در حقیقت، هر ست فرعی از فضایی نمونه‌ی گسسته یک پیش‌آمد تصادفی است. تعریف یک پیش‌آمد زمانی اتفاق می‌افتد که یکی از برآمدهای موجود در آن پیش‌آمد اتفاق افتد.

مثال (1): یک تاس سرخ و یک تاس سفید را باهم می‌اندازیم؛ اولا فضایی نمونهء این تجربه را پیدا کنید، دوما اگر پیش-آمد B ظاهر شدن دو عدد با حاصل جمع 7 بر روی تاس‌ها باشد، این پیش‌آمد را توصیف کنید.

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$S_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$S = S_1 \times S_2 = \{(i, j) / i, j = 1,2,3,4,5,6\}$$
$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

مثال (2): فضای نمونهء مربوط به طول عمر یک لامپ روشنایی را بیان کرده و پیش‌آمد A برای از کار افتادن لامپ قبل از 40 ساعت را مشخص کنید.

$$S = \{t : t \ge 0\}$$
$$A = \{t : 0 \le t \le 40\}$$

عملیات بر روی پیش‌آمدها

بنابر این که فضایی نمونه نیز یک ست است و هر ست فرعی آن نیز یک ست استو هم‌چنان پیش‌آمدها نیز ست فرعی از فضای نمونه هستند، عملیات ست‌ها را نیز می‌توان بالای این ست‌ها تطبیق نمود.

1) **اتحاد پیش‌آمدها:** اتحاد دو پیش‌آمد A و B، که به صورت $A \cup B$ نشان داده می‌شود، پیش‌آمدی است که دربردارندهء تمام برآمدهای دو پیش‌آمد A و B است.
2) **تقاطع پیش‌آمدها:** تقاطع دو پیش‌آمد A و B، که به صورت $A \cap B$ نشان داده می‌شود، پیش‌آمدی است که دربردارندهء تمام برآمدهای مشترک بین دو پیش‌آمد A و B است.
3) **مکملهء یک پیش‌آمد:** مکملهء یک پیش‌آمد، عبارت از تمام برآمدها از فضای نمونه است که در آن پیش‌آمد شامل نباشد. ازینرو:

$$A \cup A^c = S$$
$$P(A) + P(A^C) = 1$$
$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

مثال (1): سکه‌ی را به طور متوالی شش بار به هوا پرتاب می‌کنیم. دریابید احتمال این را که در این شش پرتاب حداقل یک شیر ظاهر شود.

حل: اگر ظاهر شدن یک شیر در شش پرتاب یک سکه را به A نشان دهیم، پس A^c پیش‌آمد ظاهر نشدن حداقل یک شیر خواهد بود. فضای نمونه دارای 64 عنصر است، پس $P(A^c) = \frac{1}{64}$ است.

$$P(A)=1-P(A^c)$$
$$P(A)=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}=0.98=9.8\%$$

مثال (2): تاسی را صد بار پرتاب می‌کنیم، دریابید احتمال این را که در این صد بار پرتاب حداقل یک 5 ظاهر شود.

حل: قبول کنیم B یک پیش‌آمد ظاهر شدن حداقل یک 5 باشد، آنگاه B^c پیش‌آمد ظاهر نشدن حداقل یک 5 خواهد بود:

$$P(B^c)=(\frac{5}{6})^{100}$$
$$P(B)=1-(\frac{5}{6})^{100}$$
$$P(B)=1-0.0000000121$$
$$P(B)=0.9999999879$$

نکته‌ی به یادداشتنی:

- در صورت دریافتن احتمال وقوع یک پیش‌آمد A، از تمام فضای نمونه از رابطه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ بدست می‌آید طوری که $n(A)$ تعداد عناصر پیش‌آمد A و $n(S)$ تعداد عناصر فضای نمونه است. احتمال در فضاهای گسستهء هم‌چانس، احتمال کلاسیک نیز نامیده می‌شود.

خواص احتمال

1- هرگاه A حادثه اتفاقی از فضایی نمونه S باشد در این صورت:

$$0\leq p(A)\leq 1$$

2- در صورتی که A و B دو حادثه مجزا $(A\cap B)=\emptyset$ باشند، در این حالت از دو حادثه A و B وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی رخ دهد، در این صورت:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

3- اگر A ست فرعی از B باشد، در این حالت اتفاق افتاده حادثه A مستلزم اتفاق افتادن حادثه‌ی B است، در این صورت:

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

4- اگر A و B دو حادثه اختیاری از فضایی نمونه S باشند پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$$

5- هرگاه $AB = \phi$ شود، این حالت را ناسازگاری می‌نامند، یعنی این دو حادثه هرگز باهم رخ نمی‌دهند.

6- هرگاه حادثه‌ی یقینا رخ بدهد آن را مطمئن می‌نامند در حالیکه اگر حادثه‌ی رخ با یقین کامل رخ ندهد، آن را ناممکن می‌نامیم.

نکات بیاد داشتنی

- $A \cup B$: اجتماع دو پیش آمد به این معنی است که حد اقل یکی از A یا B از فضایی نمونه S رخ دهد.
- $A \cap B$: به این معنی است که A و B با هم رخ دهند. مثلا آمدن عدد 2 به همراه 5 در پرتاپ یک تاس. که بنام حادثه ناسازگار یا مانع الجمع یاد می‌گردد.
- $A - B$: مجموعه عناصری که در A باشند ولی در B نباشند. وقوع $A - B$ به این معنی است که A رخ دهد بدون این که B رخ داده باشد.

مثال (1): در انداختن یک جوره تاس سرخ و سبز، احتمال این که مجموع ارقام ظاهر شده مساوی به 12 باشد را محاسبه کنید.

$$S = S_1 \times S_2 = \{(i, j) / i, j = 1,2,3,4,5,6\}$$
$$A\{(6,6)\}$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36} = 0.278$$

مثال (2): از بین 22 نفر محصل قرار است برای انجام کارهای لابراتواری 8 نفر را انتخاب کنیم، و از این 22 نفر 12 نفر محصل آن پسر و 10 نفر آن‌ها دخترند. مطلوب است احتمال آن که 4 نفر از بین محصلان دختر و 4 نفر از بین محصلان پسر انتخاب شود.

حل: در اینجا فضای نمونه عبارت است از تمام حالات ممکن برای انتخاب 8 نفر از 22 محصل؛ یعنی:

$$P(S)=\binom{22}{8}$$

$$n(A)=\binom{10}{4}\cdot\binom{12}{4}$$

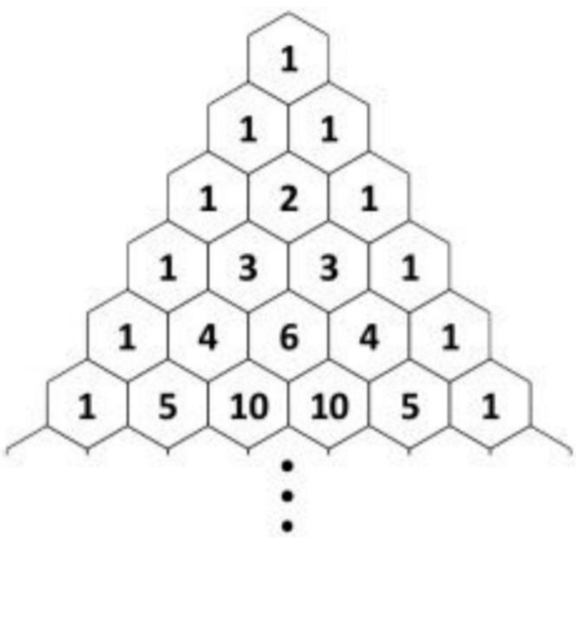
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{10}{4}\cdot\binom{12}{4}}{\binom{22}{8}}=0.33...$$

احتمال دو جمله‌یی

اگر یک سکه را پرتاب کنیم، می‌دانیم که دو حالت هم‌چانس: خط و شیر وجود دارد. یعنی نتایج هر حالت دارای احتمال $\frac{1}{2}$ است. حال اگر دو، سه و یا چهار سکه را پرتاب کنیم، به ترتیب چهار، هشت یا شانزده حالت هم‌چانس وجود دارد که در ست‌های زیر نشان داده شده اند.

- فضای نمونه در پرتاب یک سکه $S_1=\{T,H\}$.
- فضای نمونه در پرتاب دو سکه $S_2=\{(T,T),(T,H),(H,T),(H,H)\}$
- فضای نمونه در پرتاب سه سکه $S_3=\{(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,H,H)\}$

احتمال برآمدها در پرتاب سکه، چنان‌چه از آن جدول تهیه شود، شباهت به مثلث پاسکال خواهد داشت.



$1(a+b)^0$

$1 \quad 1(a+b)^1$

1(a+b)^2 2 1

1(a+b)^3 3 3 1

1(a+b)^4 4 6 4 1

1(a+b)^5 5 10 10 5 1

1(a+b)^6 6 15 20 15 6 1

1(a+b)^7 7 21 35 35 21 7 1

1(a+b)^8 8 28 56 70 56 28 8 1

بر اساس مثلث پاسکال می‌توانیم تا از نحوهء دریافت حدود مطابقت دو جمله‌یی برای دریافت فورمول احتمال دوجمله‌یی استفاده کنیم. اگر پرتاب سکه را به این شکل ادامه بدهیم نتیجه‌ی که بدست می‌آید این خواهد بود که صورت‌ها از ضرایب حدود در مثلث پاسکل و مخرج‌ها 2^n، که n تعداد پرتاب را نشان می‌دهد، پیروی می‌کنند؛ پس:

$$P(T_k)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \qquad P(H_k)=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

در اینجا $P(T_k)$ تعداد ظاهر شدن خط و $P(H_k)$ تعداد ظاهر شدن شیر را نشان می‌دهند.

مثال: تاس سالمی را پانزده بار می‌اندازیم. احتمال این که در این پرتاب 6 بار یک عدد تاق ظاهر شود چند است؟ احتمال این که 4 بار در این پرتاب یک عدد جفت ظاهر شود، چقدر است؟ (در اینجا تاق و جفت آمدن تاس باعث ایجاد دوجمله‌یی می-شود.)

$$P(E_6)=\frac{\binom{15}{6}}{2^{15}}=\frac{15!}{6!(15-6)!\cdot 2^{15}}=0.15$$

$$P(O_4)=\frac{\binom{15}{4}}{2^{15}}=\frac{15!}{4!(15-4)!\cdot 2^{15}}=0.04$$

پیش‌آمدهای ساده

هر ست یک عنصره از فضای نمونه را یک پیش‌آمد ساده می‌نامیم. به صورت عموم اگر فرض کنیم که $S=\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ شامل n عنصر باشد، به هر پیش‌آمد A_n یک عدد حقیقی $P(A_n)$ که احتمال پیش‌آمد A_n است را نسبت داد. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب شود:

- $0 \le P(A_n) \le 1$
- $P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$

مثال: تاسی به گونه‌ی ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد تاق دو چند احتمال ظاهر شدن عدد جفت است. اگر در پرتاب این تاس، E پیش‌آمد وقوع عددی بزرگ‌تر از 3 باشد، $P(E)$ را دریابید.

$$P(1)=P(23)=P(5)=2x$$
$$P(2)=P(4)=P(6)=x$$
$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$$
$$2x+x+2x+x+2x+x+2x=1$$
$$9x=1$$
$$x=\frac{1}{9}$$
$$P(E)=P(4)+P(5)+P(6)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}=0.44...$$

احتمال در فضاهای پیوسته

برای بدست آوردن احتمال از این فضاهای نمونه، باید طول انتروال در اعداد حقیقی، مساحت سطوح در مستوی و یا حجم اشکال فضایی را محاسبه کنیم. در اینجا به جای استفاده از عناصر ست پیش‌آمد و تعداد عناصر ست فضای نمونه، می‌توان از اندازه فضای پیش‌آمد و اندازه فضای نمونه استفاده کرد که در زیر نشان داده می‌شود.

فرض کنیم A پیش‌آمد مورد نظر در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم که:

- اگر A و S ست‌های فرعی از اعداد حقیقی باشند، یعنی $A \wedge S \subseteq IR$؛ پس:

$$P(A)=\frac{L_A}{L_S}=\frac{A-lenght}{S-lenght}$$

- اگر A و S ست‌های فرعی از یک مساحت مستوی باشند، یعنی $A \wedge S \subseteq IR^2$؛ پس:

$$P(A)=\frac{A_A}{A_S}=\frac{A-Area}{S-Area}$$

- اگر A و S ست‌های فرعی از یک فضای نمونه حجم باشند، یعنی $A \wedge S \subseteq IR^3$؛ پس:

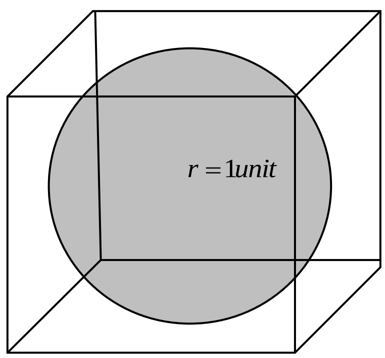
$$P(A)=\frac{V_A}{V_S}=\frac{A-Volume}{S-Volume}$$

مثال (1): روی محور اعداد در انتروال باز $(0,3)$ یک نقطه مانند x را به صورت افقی انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این عدد $1 < x < 2.5$ باشد، را دریافت کنید.

$$P(A) = \frac{L_A}{L_S} = \frac{A - lenght}{S - lenght} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

مثال (2): به صورت اتفاقی یک نقطه را در داخل یک مکعب به ضلع 2 واحد انتخای می‌کنیم. احتمال این که نقطه‌یی مذکور داخل کره‌ی محاطی مکعب قرار داشته باشد، چقدر است؟

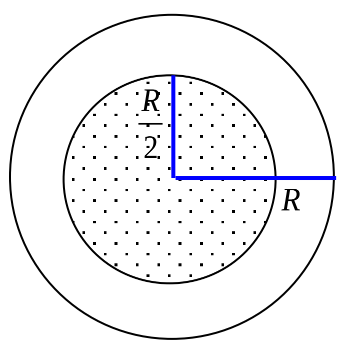
(کره داخل مکعب مذکور با ضلع دو واحد محاط شده است، در این صورت شعاع کره یک واحد است.)



$$P(A) = \frac{V_A}{V_S} = \frac{A - Volume}{S - Volume} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi (1)^3}{2^3} = \frac{\pi}{6}$$

مثال (3): دایره‌ی زیر را در نظر گرفته سپس نقطه‌ای را به طور تصادفی بر روی سطح آن انتخاب می‌کنیم. احتمال این که این نقطه در داخل دایره‌ی کوچک باشد، چقدر است؟

$$P(A) = \frac{\pi (\frac{R}{2})^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$



مثال (4): بس‌های یک شرکت از ساعت هفت صبح شروع به کار می‌کنند و هر 15 دقیقه یک بار به ایستگاه می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت 7 تا $07:30$ به ایستگاه وارد شود، احتمال این که کم‌تر از 5 دقیقه منتظر بماند چقدر است؟ و احتمال این که بیشتر از 10 دقیقه منتظر بس بماند چقدر است؟

حل: چون این شخص در زمانی بین 7 تا $07:30$ به ایستگاه می‌سد، فضای نمونه‌ی مربوط به این آزمایش تصادفی رسیدن به ایستگاه فاصله‌ی زمانی $(7,07:30)$ است. برای این که شخص کم‌تر از 5 دقیقه منتظر بماند، باید در یکی از لحضات بین $07:10$ تا $07:15$ یا $07:25$ تا $07:30$ به ایستگاه برسد. بنابراین پیش‌آمد مورد نظر از دو فاصله‌ی زمانی $(07:10,07:15)$ و $(07:25,07:30)$ تشکیل یافته است؛ لذا احتمال این پیش‌آمد مساوی است به:

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{5+5}{30}\cong 0.333$$

برای این که شخص بیشتر از 10 دقیقه منتظر بماند، باید در یکی از لحاظ بین 7 تا $07:05$ یا $07:15$ تا $07:20$ به ایستگاه برسد؛ لذا در این حالت پیش‌آمد مطلوب عبارت است از اتحاد دو فاصله‌ی زمانی $(7,07:05)$ و $(07:15,07:20)$. در نتیجه، احتمال آن مساوی است به:

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{5+5}{30}\cong 0.333$$

احتمال مشروط

هرگاه A و B دو حادثه از فضایی نمونه S باشد طوری که $P(B) \neq 0$ احتمال حادثه A بشرط این که حادثه B رخ داده باشد احتمال مشروط A نظر به B گفته می‌شود و عبارت است از:

$$P(A\,|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A).P_A(B)}{P(B)}$$

گاه رویدادها می‌توانند "وابسته"باشند... گاهی اوقات یک رویداد می‌تواند بر رویداد بعدی تاثیر گذارد.

در مورد احتمال شرطی دو فورمول ذیل را مد نظر می‌گیریم.

$$P_B(A)=\frac{P\ (\ A\ \cap B)}{P(B)}$$

$$P_A(B)=\frac{P_B A.P(B)}{P(B).P_B(A)+P(B).P_B(A)}$$

مثال (1): در یک جعبه 4 قلم آبی 5 قلم سرخ وجود دارد ازین جعبه به طور متوالی و بدون جاگزینی انتخاب می‌کنیم.

احتمال این که هر دو قلم یک رنگ باشد چند است؟

احتمال این که هر دو قلم آبی باشد= $\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{12}{72}$

احتمال این که هر دو قلم سرخ باشد= $\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{20}{72}$

احتمال این که هردو قلم یک رنگ باشد= $\frac{12}{72}+\frac{20}{72}=\frac{4}{9}$

مثال (2): دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم، احتمال این که در این پرتاب حد اقل یک 6 ظاهر شود، به شرط این که وجوه ظاهر شده دوتاس متفاوت باشد، چقدر است؟

حل: فضای نمونه در پرتاب دو تاس عبارت است از : $S=\{(x,y)/x=1,2\ldots,6,y=1,2\ldots,6\}$

فرض کنیم A پیش‌آمد ظاهر شدن حداقل یک 6 در پرتاب این تاس و B پیش‌آمد این که وجوه تاس‌ها اعداد متفاوت باشد، پس:

$$A=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,1)\}$$
$$B=\{(x,y)/x\neq y, x=1,2\ldots,6, y=1,2,\ldots,6\}$$
$$A\cap B=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\qquad P(B)>0$$

$$P(A\cap B)=\frac{10}{36}=\frac{10}{36}\Rightarrow P(A\mid B)=\frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}}\cong 0.333$$

مثال (2): از ارقام (7,6,5,4,3,2,1) یک رقم را انتخاب نموده، مطالعه می‌نمائیم که این رقم انتخاب شده تاق است، احتمال این که رقم مذکور کوچک‌تر از 5 باشد را دریافت کنید.

حل: فضای نمونه‌ی این تجربه به صورت کل $S=\{7,6,5,4,3,2,1\}$ می‌باشد، حال اگر B یک پیش‌آمد انتخاب عدد تاق و A یک پیش‌آمد انتخاب عدد کوچک‌تر از 5 باشد، در این صورت داریم که:

$$B=\{1,3,5,7\}$$
$$A=\{1,2,3,4\}$$
$$A\cap B=(1,3)$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{7}}=0.5$$

مثال (3): دو تاس را پرتاب می‌کنیم، اگر شماره‌های هر دو تاس تاق باشد، احتمال این که مجموع شماره‌ها هشت باشد را دریابید.

حل: فضای نمونه این تجربه متشکل از 36 پیش‌آمد ساده می‌باشد؛ پس در این صورت داریم که:

$$B=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$
$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{9}{36}$$

حالا پیش‌آمدی که مجموع شناره‌های هر دو تاس هشت باشد را به A نشان می‌دهیم؛ یعنی:

$$A=\{(4,4),(2,6),(6,2),(3,5),(5,3)\}$$
$$A\cap B=\{(3,5),(5,3)\}$$
$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$
$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{2}{9}\cong 0.22$$

قانون ضرب احتمالات

اگر پیش‌آمد B مشروط بر پیش‌آمد A باشد، در این صورت داریم که:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(A\mid B)$$
$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

مثال (1): در یک خریطه 4 مهره سفید و 5 مهره سیاه قرار دارند، دو مهره را یکی پی دیگری به شکل تصادفی از خریطه بیرون می‌آوریم، احتمال این که مهره‌ی اول سفید و مهره‌ی دوم سیاه باشد را دریافت کنید.

حادثه A) مهره‌ی اول سفید باشد.

حادثه B) مهره‌ی دوم سیاه باشد.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{18}$$

مثال (2): اگر در شکل زیر یک مهره از ظرف A به ظرف B و سپس از B به C انداخته شود، و سپس یک مهره از ظرف C خارج کنیم، احتمال این که دو مهره‌ی منتقل شده و مهره‌ی خارج شده از C هر سه سفید باشند را دریابید.

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)=\frac{2}{8}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{48}\cong 0.104$$

قانون Bayes

در سال 1763میلادی دانشمند و ریاضی‌دان انگلیستانی بنام توماس بیئز قانون بسیار کاربردی و مهمی را بیان کرد که برای دسته‌بندی پدیده‌ها، بر پایه احتمال وقوع و یا عدم وقوع یک پدیده استوار است. اگر برای فضای نمونه‌ی مفروضی بتوانیم یم انقسام در فضای نمونه‌ی S با دانستن این که کدام یک از پیش‌آمدها رخ داده است انتخاب کنیم، بخش مهمی از عدم اطمینان تقلیل می‌یابد. اهمیت این قانون زمانی آشکار می‌شود که از طریق آن احتمال یک پیش‌آمد(حادثه) را با مشروط کردن نسبت به وقوع پیوستن و عدم وقوع یک پیش‌آمد دیگر محاسبه کنیم. اکثرا احتمال یک پیش‌آمد به صورت مستقیم، مشکل است، در حالی که با استفاده از این قضیه و مشروط کردن پیش‌آمد مورد نظر نسبت به پیش‌آمد دیگر، می‌توان احتمال مورد نظر را به آسانی محاسبه نمود.

یکی از دستورات مهم در محاسبه احتمال شرطی قانون Bayes می‌باشد که به کمک آن می‌توانیم با استفاده از اطلاعاتی که در مرحله دوم آزمایش به دست می‌آوریم احتمال‌های مربوط به مرحله اول آزمایش را محاسبه کنیم.

مثال(1): اگر $B_1, B_2, ..., B_n$ تعداد واقعه ناسازگار باشند و P(Bi) احتمال وقوع Bi باشد، با توجه با این که احتمال وقوع A باشد با P(Bi | A), P(A|Bi) قانون بئس عبارت است از:

$$P(Bi|A)=\frac{p(Bi)P(A|Bi)}{\sum_{i=1}^{n}p(Bi)P(A|Bi)}$$

مثال (2): یک شرکت تولیدی مواد خام مورد نیاز خود را از دو شرکت دیگر تهیه می‌کند. اگر A_1 تعلق به مواد خام شرکت اول و A_2 تعلق به شرکت مواد خام دوم داشته باشد، هم‌چنان 65% مواد از شرکت اول و 35% متباقی از شرکت دوم خریداری می‌شود. و نیز 98% از محصول شرکت اول کیفیت خوب و باقی کیفیت خراب دارند و 95% محصول شرکت دوم کیفیت خوب و باقی‌مانده‌ی آن کیفیت خراب دارند. اگر G را پیش‌آمدی (حادثه‌ی تصادفی) فرض کنیم؛ که محصول کیفیت خوب داشته باشد و B را پیش‌آمد این که محصول خراب باشد در نظر بگیریم، حال اگر یک محصول را به طور تصادفی برداریم و این محصول کیفیت بد داشته باشد، دریابید:

الف) با چه احتمال این محصول مربوط شرکت اول خواهد بود؟

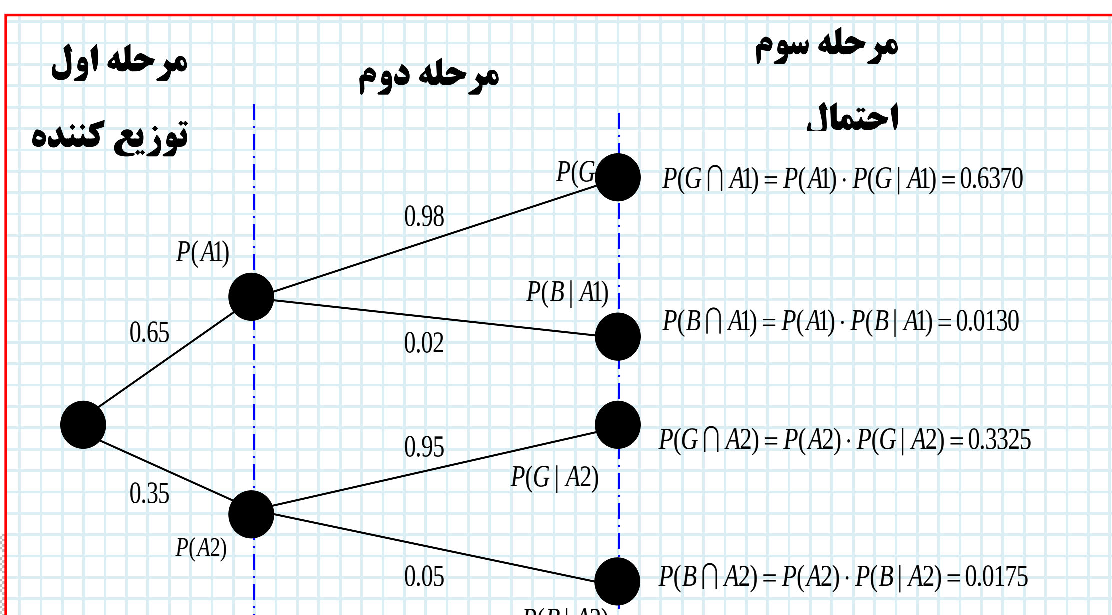
ب) با چه احتمال این محصول مربوط شرکت دوم خواهد بود؟

حل: برای حل این سوالات به معلومات دیگری نیازمندیم که مرحله به مرحله تعقیب می‌کنیم:

می‌دانیم که 98% تولیدات شرکت اول و 95% تولیدات شرکت دوم کیفیت خوب دارند و هم‌چنان 2% تولدات شرکت اول و 3% تولیدات شرکت دوم خراب اند؛ پس:

$$P(G \mid A_1) = 0.98 \wedge P(B \mid A_1) = 0.02$$
$$P(G \mid A_2) = 0.95 \wedge P(B \mid A_2) = 0.05$$

دیاگرام درختی آن قرار زیر است:



حالا اگر از قانون بیئز استفاده کنیم، داریم که:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \bigcap B)}{P(B)}$$

با به توجه به دیاگرام درختی داریم:

$$P(A_1 \bigcap B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)$$

اگر بخواهیم $P(B)$ را دریافت کنیم، در این صورت B به دو پیش‌آمد دیگری مانند $(A_1 \bigcap B)$ و $(A_2 \bigcap B)$ وابسته است. ازین رو داریم که:

$$P(A) = P(A_1 \bigcap B) + P(A_2 \bigcap B) = P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)$$

الف) اکنون روابط 2 و 3 را در رابطه‌ی 1 وضع می‌کنیم تا قانون بیئز بدست آید:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)} \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)} \cdots\cdots\cdots (5)$$

حال معادله‌ی 4 را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2)} \cdots\cdots\cdots (4)$$

$$= \frac{(0.65)(0.02)}{(0.65)(0.02) + (0.35)(0.05)} = \frac{0.0130}{0.0130 + 0.175} = \frac{0.0130}{0.0305} = 0.4262$$

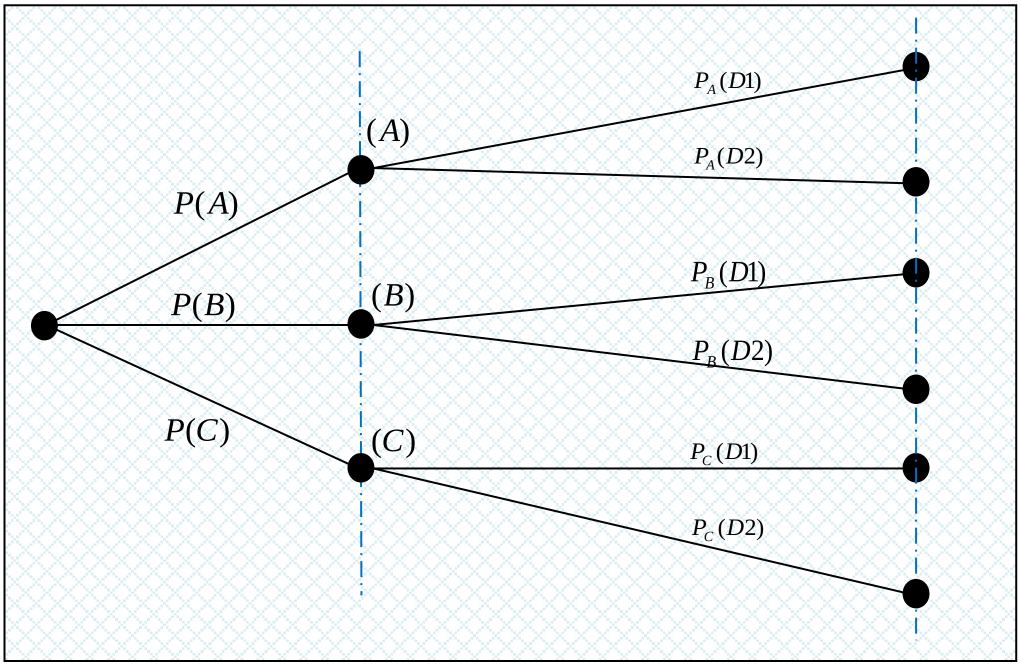
ب) حال معادله‌ی 5 را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)\cdot P(B\mid A_2)}{P(A_1)\cdot P(B\mid A_1) + P(A_2)\cdot P(B\mid A_2)}$$
$$= \frac{(0.35)(0.05)}{(0.65)(0.02)+(0.35)(0.05)} = \frac{0.175}{0.0130+0.175} = \frac{0.175}{0.0305} = 0.5738$$

مثال (3): در یک امتحان شاگردان سه لیسه، هم از دختران و هم از پسران اشترام نموده‌اند، طوری که چانس کامیاب شدن شاگردان هر لیسه به ترتیب 25% و 35% و 40% می‌باشد. اگر چانس کامیاب شدن شاگردان پسر هر لیسه به ترتیب 50%، 45% و 60% باشد، در این صورت دریابید:

الف) احتمال کامیاب شدن یک شاگرد پسر را؛
ب) احتمال آن‌که شاکرد پسر کامیاب شده از نصف لیسه سومی باشد.

حل: ابتدا باید دیاگرام درختی این تجربه‌ی تصادفی را ترسیم کنیم:



الف) حل:

$$P(D) = (0.25)(0.5) + (0.35)(0.45) + (0.4)(0.6) = 0.125 + 0.1575 + 0.24 = 0.5225 = 52.25\%$$

ب) حل:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{(0.4)(0.6)}{(0.5225)} = 0.4593 = 45.93\%$$

احتمال مستقل

دو حادثه اتفاقی A و B از هم مستقل نامیده می‌شوند در صورتی که حادثه‌ی قبلی هیچ تاثیری بالای حادثه بعدی نداشته باشد مثلا انداختن یک سکه.

در حادثه اتفاقی A و B از هم مستقل با داشتن نقطه مشترک

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$ اصل حاصل ضرب

دو حادثه اتفاقی A و B از هم مستقل بدون نقطه مشترک

$$P(A/B) = P(A) + P(B)$$ اصل حاصل جمع

مثال (1): یک سکه و یک تاس را باهم پرتاب می‌کنیم، در صورت آن‌که سکه شیر و شماره تاس بزرگتر از 2 باشد را دریابید.

$$S = \begin{cases} (H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6) \\ (T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6) \end{cases}$$

$P(A) = \frac{1}{2}$ (شیر آمدن)

$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (شماره تاس بزرگتر از دو)

$$A \cap B = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

مثال (2): در پرتاب یک تاس دو پیش‌آمد $A = \{3,5,6\}$ و $B = \{4,5\}$ را در فضای نمونه‌ی $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ در نظر می‌گیریم. نشان دهید که این دو پیش‌آمد از هم مستقل اند.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \qquad (A\cap B)=\{5\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \qquad P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

متحول تصادفی

متحول تصادفی توصیف عددی برآمد یک آزمایش است؛ به عبارت دیگر، متحول تصادفی تابعی از فضای نمونه به اعداد حقیقی است. و یا این که متحول تصادفی قانونی است که به وسیله‌ی آن به نقطه‌یی از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت داده می‌شود. متحولین تصادفی معمولا با حروف بزرگ مانند X و Y نمایش داده می‌شوند. متحول‌های تصادفی به دو بخش گسسته و پیوسته تقسیم می‌شوند.

- متحول تصادفی X را گسسته گویند، هرگاه تعداد مقادیری که می‌تواند اختیار کند متناهی یا نامتناهی قابل شمارش باشد.
- متحول تصادفی X را پیوسته گویند، هرگاه مقادیری که می‌تواند اختیار کند از یک ست نامتناهی (زمان، مکان و ...) باشد؛ به عبارت دیگر مقادیر متحول تصادفی پیوسته X در یک فاصله یا انتروال قرار دارد.

در اصطلاح ریاضی به قانونی که اعداد حقیقی خاصی را به هریک از برآمدهای یک آزمایش تجربی تصادفی نسبت می-دهد، تابع می‌گویند؛ اما در اصطلاح احتمالات به این تابع متحول تصادفی گفته می‌شود. حال آن‌که متحول تصادفی مانند متحول‌های معمول الجبری نبوده و یک تابع است و باید خصوصیات یک تابع را بر اساس مبانی ریاضی دارا باشد.

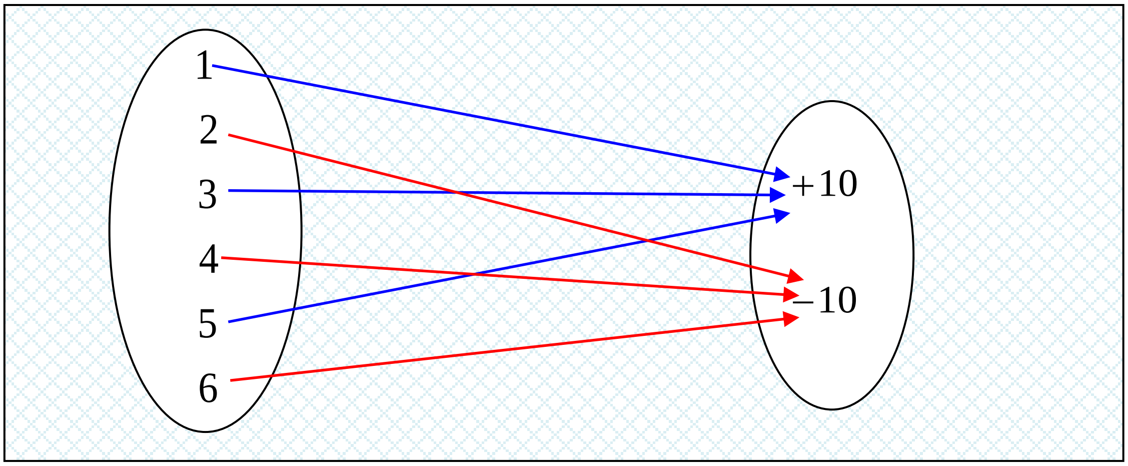
تابع احتمال

به تابعی که بتوان با استفاده از آن احتمال هر یک از مقادیر ممکن متحول تصادفی را مشخص کرد، تابع احتمال یا توزیع احتمال گفته می‌شود. به عبارت دیگر، تابع احتمال به تابعی گفته می‌شود که ناحیه‌ی تعریف آن ست متحولین تصادفی و ناحیه قیمت آن احتمال وقوع هریکی از متحولین باشد و معمولا تابع احتمال پیش‌آمد (حادثه) A را به شکل $P(X=x_i)=F(x_i)$ نشان می‌دهند. به یاد داشته باشید که هر تابع احتمال دارای دو خاصیت زیر است:

- $0\le F(x_i \le 1$
- $\sum_{i=1}^{n}F(x_i)=1$

مثال (1): فرض کنید در یک بازی، شخصی تاسی را می‌اندازد، با ظاهر شدن عدد تاق ده افغانی به او می‌دهیم و با ظاهر شدن عدد جفت ده افغانی از او می‌گیریم و متحول تصادفی X را درآمد شخص قبول می‌کنیم، مقادیر درآمد وی را دریابید.

حل: می‌دانیم که فضای نمونه‌ی تاس $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ است، چنان‌چه در شکل دیده می‌شود، فضای نمونه‌ی S تحت تابع X به ست اعداد حقیقی برده شده است که R متشکل از دو نقطه‌ی $+10$ و -10 است، طوری که $+10$ نشان دهنده‌ی ده افغانی درآمد و -10 نشان دهنده‌ی ده افغانی ضرر این شخص است.



$X : S \to IR$

$X(1)=10 \qquad X(2)=-10$

$X(3)=10 \qquad X(3)=-10$

$X(5)=10 \qquad X(5)=-10$

$B=(2,4,6)$

$A=(1,3,5)$

$$P(X=10)=P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=-10)=P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

X	-10	$+10$
$F(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

مثال (2): تابع احتمال را در پرتاب دو سکه دریابید.

حل: در تجربه‌ی مذکور متحول تصادفی را خط ظاهرشدن سکه در نظر می‌گیریم؛ پس در این صورت داریم که:

$X = \{0,1,2\}$

X	0	1	4
$F(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$f = \{(0,\frac{1}{4}),(1,\frac{1}{2}),(2,\frac{1}{4})\}$$

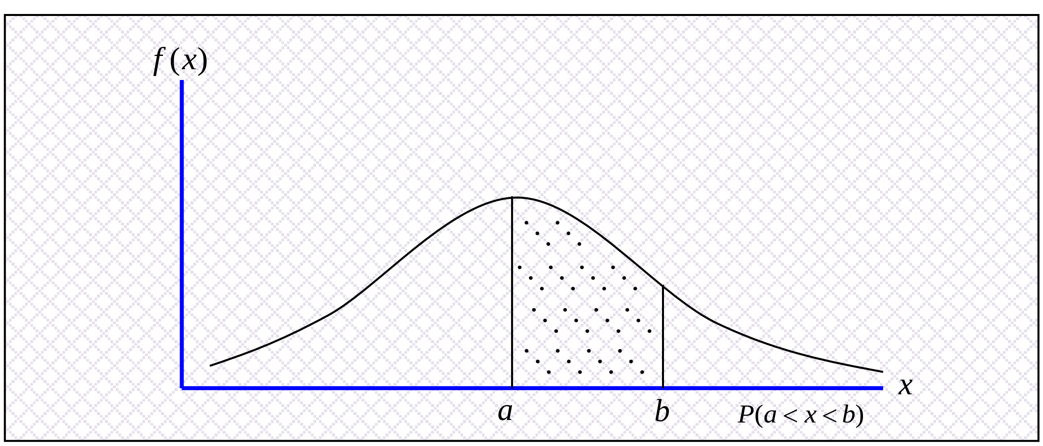
متحول تصادفی گسسته: اگر کمیت‌هایی که یک متحول تصادفی اختیار می‌کند، همه از یک دیگر گسسته بوده و باهم فاصله داشته باشند، آن متحول تصادفی را متحول تصادفی گسسته می‌گویند. از سوی دیگر، اگر بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین کمیتی که یک متحول تصادفی می‌تواند اختیار کند، فضایی پیوسته و یا ستی از فضاهای پیوسته وجود داشته باشد، آن متحول تصادفی یک متحول تصادفی پیوسته است.

تابع احتمال متحول تصادفی گسسته: تابع احتمال یک متحول تصادفی گسسته تابعی است که ناحیه تعریف آن اعداد حقیقی و ناحیه قیمت‌های آن احتمال‌های مربوط به آن اعداد حقیقی است. در رابطه با تابع احتمال هر متحول تصادفی گسسته، دو شرط زیر برقرار است:

- $P(x_i) \geq 0$
- $\sum P(x_i) = 1$

تابع احتمال یک متحول تصادفی را **توزیع احتمال** نیز می‌گویند.

تابع احتمال متحول تصادفی گسسته: تابع $f(x)$ تابع کثافت احتمالات برای متحول تصادفی پیوسته X نامیده می‌شود. اگر مجموع سطوح زیر منحنی که به وسیله‌ی محور X ها احاطه شده مساوی به 1 باشد و اگر سطح زیر منحنی بین هر دو طول $x = a$ و $x = b$ احتمالی را بدهد که x بین a و b قرار گیرد.



مقدار مورد انتظار گسسته: اگر متحولین تصادفی گسسته X بتواند مقدار x_1 را با احتمال P_1 و x_2 را با احتمال P_2 و غیره تا مقدار x_k را با احتمال P_k اختیار کند پس مقدار مورد انتظار پیوسته عبارت است از:

$$E(x) = x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_kP_k = \sum_x x_iP_i$$

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k = 1$$

$$E(x) = \frac{x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_kP_k}{P_1 + P_2 + \ldots + P_k}$$

مقدار مورد انتظار پیوسته: مقدار مورد انتظار متحول تصادفی پیوسته X که با سمبول $E(X)$ نشان داده می‌شود مساوی است به:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

توزیع برنولی

آزمایش‌های که دارای دو برآمد ممکن باشند و احتمال هر برآمد از آزمایشی به آزمایش دیگر ثابت باشد و هم‌چنان آزمایش‌ها از همدیگر مستقل باشند طوری که وقوع یکی از برآمدها را پیروزی و دیگری را شکست قبول کنیم در این صورت هر کدام از آزمایش‌های مورد نظر یک آزمایش برنولی و توزیع تعداد پیروزی‌ها را توزیع برنولی گویند.

در یک آزمایش، احتمال پیروزی را با p و احتمال ناکامی را با q نشان می‌دهیم. از این که این دو (p و q) متمم یکدیگرند، لذا $p + q = 1$ خواهد بود.

- هر آزمایش به یکی از دو حالت کامیابی و یا ناکامی ختم می‌گردد.
- احتمال کامیابی و ناکامی در تمام آزمایش‌ها ثابت و یکسان است.
- تمام آزمایش‌ها در عین شرایط و مستقل از هم دیگر صورت می‌گیرند.
- بصورت عموم احتمال k کامیابی در n آزمایش برنولی عبارت از $P(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ است.
- اوسط توزیع دوجمله‌یی را بصورت $\bar{x} = np$ و انحراف معیاری این توزیع را به صورت $S = \sqrt{npq}$ ارائه نمود.
- هرگاه در اثر انجام یک تجربه‌ی تصادفی احتمال کامیابی و ناکامی مساوی باشند؛ یعنی $p = q = \frac{1}{2}$ باشد، در این صورت برای دریافت احتمال k کامیابی در n آزمایش از رابطه $P(k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ بدست می‌آید.

مثال (1): یک دانه تاس را شش مرتبه پرتاب می‌کنیم. دریافت نمائید که در چهار پرتاب آن عدد ظاهر شده کم‌تر از سه باشد.

حل: هرگاه شماره ظاهر شده‌ی تاس از سه کم‌تر باشد، در این صورت احتمال آن:

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad , \qquad q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(4) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{243} = 0.0823$$

مثال (2): در یک فامیل پنج فرزندی احتمال این که دو تن از فرزندان پسر و بقیه دختر باشد، چند است؟

حل: اگر احتمال پسر بودن و دختر بودن فرزندان را مساوی در نظر بگیریم، در این صورت $p = \frac{1}{2}, q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ می‌باشد.

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

توزیع احتمال دوجمله‌یی

در n آزمایش برنولی که در آن احتمال پیروزی p است، متحول تصادفی x را تعداد پیروزی‌ها در نظر می‌گیریم. توزیع احتمال x را توزیع دوجمله‌یی با احتمال پیروزی p می‌نامیم که در آن متحول تصادفی x می‌تواند مقادیر 2,1,0... و n را اختیار کند.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x}, x = 0,1,2,\dots,n$$

مثال (1): فرض کنید یک محصل می‌خواهد به 5 سوال چهارجوابه جواب دهد. با توجه به گذشته‌ی این محصل جواب احتمال صحیح جواب دادن به هر سوال 0.90 است، دریابید احتمال این را که این محصل به دو سوال از پنج سوال درست جواب داده باشد.

$q = 0.10$

$p = 0.90$

$n = 5, x = 1,2,3,4,5$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-q)^{n-x}$$

$$\Rightarrow P(X = x) = \binom{5}{2} \cdot (0.90)^2 \cdot (1-0.10)^{5-2} = 0.0081$$

نکات مهم!

- ✓ اگر $P(X = x_i) = f(x_i)$ داشته باشیم، در این صورت جوره‌های مرتب $[x_1, f_{(x1)}],....,[x_n, f_{(xn)}]$ را تابع احتمال مجزا یا گسسته می‌نامند.
- ✓ تابع احتمال پیوسته و تجمعی را می‌توان به شکل $F(x) = P(X \le x)$ ارائه نمود.
- ✓ اگر $f(x)$ تابع احتمال و x متحول تصادفی باشد در این صورت احتمال این که x بین k_1 و k_2 قرار گیرد برابر است با $P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$.
- ✓ اگر x متحول تصادفی پیوسته و $k_1 < k_2$ باشد در این صورت $P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$ است.
- ✓ اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت اوسط یک متحول تصادفی x که به $E(x)$ نشان داده می‌شود برابر است به $E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + ... + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$.
- ✓ $E(x)$ اوسط x نامیده می‌شود که آن را با $\bar{x}$ نمایش می‌دهیم و هم‌چنان اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت واریانس x که به شکل S^2 نمایش داده می‌شود مساویست به:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

تمرینات حل شده

1. در یک منطقه احتمال بارندگی در اول ماه حمل 50 ٪ است، احتمال این که روز دوهم بارندگی باشد 40٪ است اگر ورز اول حمل باران ببارد احتمال این که روز دوم هم ببارد چند است؟

P1 = بارندگی روز اول = $\frac{50}{100}$ = 0,5

بارندگی روز دوم ∩ بارندگی روز اول = 0,4 = $\frac{40}{100}$ = بارندگی روز دوم = P2

2. شش نفر در چند حالت می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند؟

$$(n-1)! = (6-1)! = 5! = 120$$

3. در قفس A سه خرگوش سفید 2 سیاه، در قفس B دو خرگوش سفید 4 خرگوش سیاه و در قفس C دو خرگوش سفید و دو سیاه وجود دارد. از هر قفس یک خرگوش به تصادف انتخاب شده است مطلوب است انتخاب حد اقل دو خرگوش سفید؟

احتمال سفید بودن در قفس‌های A , B $\quad \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{12}{120}$

احتمال سفید بودن در قفس‌های A و C $\quad \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{24}{120}$

احتمال سفید بودن در قفس‌های B و C $\quad \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{120}$

احتمال سفید بودن در هر سه قفس $\quad \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{12}{120}$

احتمال حد اقل دو خرگوش سفید $\quad \frac{12}{120} + \frac{24}{120} + \frac{8}{120} + \frac{12}{120} = 0,47$

4. از یک گروه ده نفری به چند طریق می‌توان دسته‌های 3 نفری انتخاب کرد؟ به طوری که هر دسته حد اقل در یک نفر با دسته‌های دیگر اختلاف داشته باشد.

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = 120$$

5. از بین 6 نفر متخصص اصلاح نباتات و 5 نفر گیاه شناس چند گروه 5 نفری شامل 3 نفر اصلاح نبات و 2 گیاه شناس می‌توان ساخت؟

$$C\binom{6}{3}\times C\binom{5}{2}=\frac{6!}{3!\,(6-3)!}\times\frac{5!}{2!\,(5-2)!}=20\times 10=200$$

6. از خانواده‌ای با سه فرزند که بزرگترین آن‌ها پسر است، احتمال داشتن حد اقل یک دختر در این خانواده چند است؟

جواب: باید در این خصوص احتمال داشتن یک یا دو دختر را در این خانواده محاسبه کنیم یک فرزند پسر وجود دارد پس ضرور نیست به محاسبه احتمال برای فرزند پسر.

$\boldsymbol{C\binom{2}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$	احتمال داشتن یک دختر
$C\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	احتمال داشتن دو دختر
$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	احتمال داشتن حد اقل یک دختر

7. تعداد 10 نفر مریض به چند نمونه روی 12 چوکی نشسته می‌توانند؟

$$C\binom{12}{10}=\frac{12!}{10!\,(12-10)!}=66$$

8. از یک لیست دوازده نفری چند گروپ متمایز 5 نفری می‌توان انتخاب کرد؟

$$C\binom{12}{5}=\frac{12!}{5!\,(12-5)!}=792$$

9. از یک گروپ متشکل از 4 مرد و 5 زن چند کمیته 5 نفری که 3 نفر مرد و 2 نفر زن در آن باشد قابل انتخاب است؟

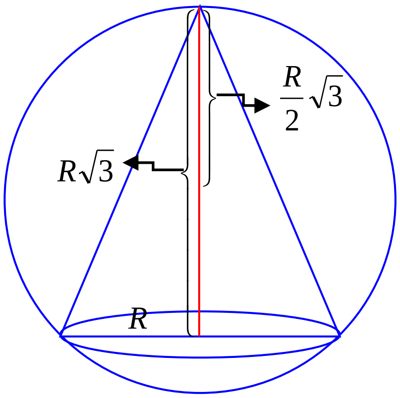
$$C\binom{4}{3}\times C\binom{5}{2}=\frac{4!}{3!\,(4-3)!}\times\frac{5!}{2!\,(5-2)!}=40$$

10. کارگر یک شرکت خصوصی هر روز بین ساعات $08:00$ تا $08:50$ در ایستگاه نزدیک منزلش که سرویس‌های مامورین آن شرکت به اوقات $08:15$، $08:30$ و $08:45$ به ایستگاه می‌رسند. چقدر احتمال دارد که شخص مذکور کم‌تر از 5 دقیقه منتظر سرویس باشد؟

حل: x یک متحول تصادفی یکنواخت در فاصلهء $[0,50]$ است، پس کارگر کم‌تر از 5 دقیقه منتظر خواهد شد اگر به ساعات $08:10$، $08:15$، $08:30$، $08:45$ و $08:50$ به ایستگاه مراجعه کند.

$$p(10<x<15)+p(25<x<30)+p(45<x<50)\Rightarrow\frac{5}{50}+\frac{5}{50}+\frac{5}{50}=\frac{15}{50}=0.3$$

11. یک نقطه‌ی تصادفی در داخل یک مخروط که شعاع قاعده‌ی آن $R=\sqrt{3}$ باشد انتخاب می‌کنیم. دریافت کنید احتمال آن که نقطه داخل کرهء محاط در این مخروط قرار گیرد.



$$V=\frac{4}{3}\pi r^{3}\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^{3}\Rightarrow\frac{R^{3}}{2}\sqrt{3}$$

$$V_{m}=\frac{1}{3}\pi R^{2}\cdot h\Rightarrow V_{m}=\frac{1}{3}(\pi R^{2})\cdot R\sqrt{3}=\frac{1}{3}\pi R^{3}\sqrt{3}$$

$$P(A)=\frac{V_{m}}{V}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^{3}\sqrt{3}}{\frac{R^{3}}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{6}=0.6$$

12. خراب بودن یک قلم خودکار می‌تواند دو دلیل داشته باشد:

- خرابی میخانیکیت
- خرابی نیچه‌ی خودکار

هرگاه احتمال آن که قلم خودکار خراب باشد، 0.088 و احتمال این که خرابی دلیل شماره اول باشد، مساوی به 0.05 و برای دومین نقص قیمت احتمال مساوی به 0.002 باشد. مطالعه کنید آیا دو دلیل بالا با هم حوادث مستقل و یا غیر مستقل می‌باشند؟

حل: هر دو حادثه اتفاقی غیر مستقل و وابسته اند؛ زیرا خراب شدن نیچه شامل خراب شدن میخانیکیت قلم می‌شود.
اگر A دلیل خراب شدن قلم جزء اول باشد؛
و اگر B دلیل خراب شدن قلم جزء دوم باشد.

$$\left.\begin{aligned}P(A)&=0.05\\P(B)&=0.02\\P(A\cap B)&=0.08\end{aligned}\right\}\Rightarrow p(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

پس حوادث مستقل نمی‌باشند.

فصل سوم

موضوعات مهم در احتمالات و احصائیه

گراف پراگندگی

عبارت است از مجموعه‌یی از نقاط در مستوی محورهای مختصات است که از رسم دیتای مربوطه به اندازه گیری در جامعه‌های دو متحوله بدست می‌آید. به غرض تشریح بیشتر خصوصیات یک توزیع فریکوینسی یا مقایسه‌ی دو یا چند توزیع، به مقیاس و اندازه‌گیری درجهء انحراف یا پراگندگی توزیع‌ها ضرورت داریم.

همبستگی و ضریب آن

به صورت فشرده نظریه همبستگی با سه نوع مقیاس ذیل کار دارد:

1. یک معادله تخمین کننده (معادله ریگریشن) که ارتباط تابعی بین دو یا بیشتر از دو متحول را افاده می‌کند. این معادله طوری که از نامش پیداست ارزش یک متحول را با متحول‌های دیگر سنجش می‌کند.
2. یک مقیاس انحراف ارزش‌های واقعی (ارزش‌های داده شده) متحول تابع از ارزش‌های سنجش شده یا تخمین شدهء آن. این مقیاس مثابه انحراف معیاری بوده و در مورد اعتماد درباره سنجش، ب‌طور مطلق معلومات ارائه می‌کند. این مقیاس بنام اشتباه معیاری تخمین یاد می‌گردد.
3. یک مقیاس درجه ء ارتباط یا همبستگی بین متحول‌ها بدون در نظر داشت واحدهای مقیاس اصلی متحول‌های مربوط. این مقیاس معمولا بنام ضریب همبستگی یاد شده و به r افاده می‌گردد. به اساس مربع این مقیاس، که ضریب تثبیت نامیده می‌شود می‌توان اندازه نسبی انحراف در مورد متحول تابع را که بوسیله معادلهء تخمین کننده تشریح شده بیان نمود.

معادلهء خطی

ساده‌ترین نوع معادله که برای افاده نمودن ارتباط بین دو متحول y و x بیشتر معمول است شکل خطی $y = a + bx$ می‌باشد که در این معادله هرگاه با افزایش متحول مستقل x متحول y نیز افزایش یابد همبستگی مثبت و برعکس آن همبستگی منفی خواهد بود.[3]

این خط را می‌توان به سه طریقه ذیل نوشت:

[3] ثابت b را بنام ضریب ریگریشن نیز یاد می‌کنند که به تفصیل در مورد خط ریگریشن مطالعه خواهید نمود.

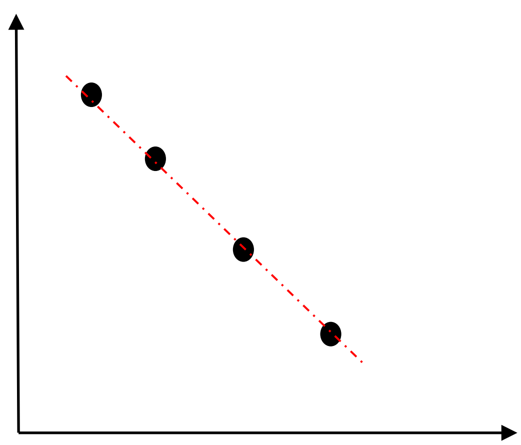
1) ترسیم خط بطور تخمینی با دست.
2) تخمین نمودن خط مستقیم با تعیین نمودن دو نقطه
3) استفاده از طریقه مربع‌های اصغری.

همچنان ضریب همبستگی را میتوان توسط فورمول ذیل حاصل کرد.

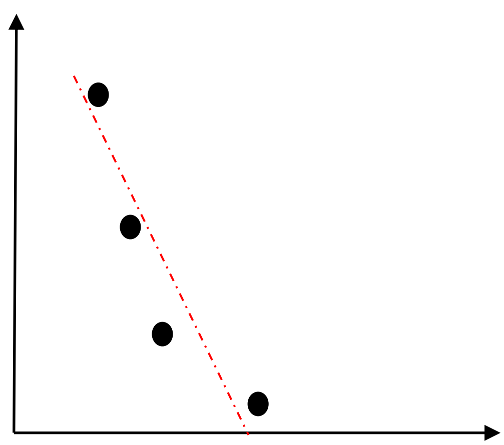
$$r=\frac{\frac{\text{مجموعه حاصل ضرب } x \text{ ها و } y \text{ ها}}{n}-(\text{اوسط } x \text{ ها})(\text{اوسط } y \text{ ها})}{\text{انحراف معیار } x \text{ ها}}$$

- در نظر داشته باشید که ضریب همبستگی 1 و 1- است و در سایر شرایط ضریب همبستگی بین این دو مقدار قرار می‌گیرد.
- به هر اندازه که قیمت مطلقه ضریب همبستگی به یک نزدیک‌تر باشد ارتباط میان متحولین بیشتر می‌شود و نقاط گراف پراگندگی به یک خط مستقیم نزدیک‌تر می‌باشد. هم‌چنان به هر اندازه که قیمت مطلق ضریب همبستگی به صفر نزدیک شود، ارتباط کم‌تر میان متحولین موجود بوده و در نتیجه نقاط پراگنده‌تر می‌شود.
- اشاره‌ی مثبت برای ضریب همبستگی نشان دهنده‌ی ارتباط مستقیم و اشاره‌ی منفی نشان دهنده‌ی ارتباط معکوس است.
- اگر اشاره‌ی ضریب همبستگی مثبت باشد، میل خط مستقیم مثبت و اگر منفی باشد میل خط مستقیم نیز منفی است.

مثال: کدام یک از گراف‌های ذیل ضریب همبستگی بلند را دارا است؟



شکل اول



شکل دوم

شکل اول دارای ضریب همبستگی بلند است زیرا نقاط آن بر روی یک خط مستقیم قرار دارند اما شکل دوم نقاط آن از خط مستقیم دور قرار گرفته اند.

مثال: دیتای زیر را در نظر گرفته، ضریب همبستگی آن را محاسبه کنید.

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+3}{4} = 1.75$$

$$\bar{y} = \frac{1+5+4+2}{4} = 3$$

$$S_x^2 = \frac{(1-1.75)^2 + (1-1.75)^2 + (2-1.75)^2 + (3-1.75)^2}{4} = \frac{2.74}{4} = 0.685$$

$$\sqrt{S_x^2} = \sqrt{0.685} \Rightarrow S_x = 0.82$$

خط ریگریسیون

یکی از روش‌های که می‌توان با استفاده از آن رابطه بین دو متحول را محاسبه نمود. به عبارت دیگر ریگریسیون رابطه بین علت و معلول بین تغییرات یک متحول تصادفی و یک متحول ثابت را تعیین می‌کند. مثلا محاسبه‌ی رابطه بین دو متحول مانند عملکرد گندم و مقدار آبیاری به این معنا نیست که عوامل دیگری در عملکرد گندم تأثیر ندارد بلکه نشان دهنده‌ی بررسی اثر عامل می‌باشد. خط مناسبی که مجموع مربعات خطاهایش از باقی خط ممکن دیگر کمتر باشد بنام خط ریگریشن Regressionیاد می‌شود.

با داشتن دو نقطه در محتصات دو بعدی می‌توان تنها یک خط مستقیم را از آن‌ها عبور داد . رابطه بین x و y توسط این خط برقرار می‌شود. در مسائل احصائیوی به طور معمول متحول y یک متحول تصادفی است و چون با اکثر موارد با بیش از یک نقطه مواجه می‌شویم، در این صورت امکان ترسیم خط مستقیم که از تمامی نقاط عبور کند ممکن نیست. بنا به دنبال خط مستقیمی هستیم که بتواند از بیشترین نقاط عبور کند. در این صورت خطوط زیادی وجود دارد که به شکل $y = ax \pm b$ قرار دارند. اما خطی که از بیشترین نقاط عبور کند، این خز را بهترین خط می‌نامیم. از میان خطوطی که می-توان بین نقاط رسم نمود، مناسب‌ترین آن‌ها خطی است که قیمت مطلق انحراف مقادیر متحول $\hat{y}$ یعنی $y\sum / y - \hat{y} /$ حداقل باشد. این استدلال شبیه توجیه‌های است که در مورد فورمول واریانس انجام دادیم.

در نهایت هدف نهایی بدست آوردن معادله خطی است. پراکندگی نقاط y برای هر یک از مقادیر ثابت x در اطراف آن حد اقل باشد.

برای این که معادله خطی خط ریکریشن را پیدا نمائیم نیاز داریم تا قیمت های a و b را برای معادله خطی

$y = ax + b$ دریافت کنیم که قیمت های a و b طور ذیل پیدا می‌شود.

$$a = r.\frac{\sqrt{Var\ Y}}{\sqrt{Var\ X}} = \text{ضریب همبستگی}.\frac{\text{انحراف معیاری } y}{\text{انحراف معیاری } x}$$

$$b = y' - ax'$$

مثال: دیتای ذیل را در نظر گرفته خط ریگریشن y را نسبت به x دریافت کنید.

X	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

$$x' = \frac{\sum \mathrm{x_i}}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y' = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2$$

$$\sqrt{Var\ X} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - x')^2}{n}} = \sqrt{\frac{4+1+0+4+1}{5}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{Var\ Y} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y')^2}{n}} = \sqrt{\frac{4+1+0+1+4}{5}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4+4+6+6+0}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - x'y'}{\sqrt{Var\ X} \times \sqrt{Var\ Y}} = \frac{\frac{1}{5}(4-6)}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = -1$$

$$a = r\frac{\sqrt{Var\ X}}{\sqrt{Var\ Y}} = \frac{-1)(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = y'.ax' = 2 - (-1)3 = 5$$

$y = ax + b \rightarrow y = -x + 5$ عبارت است از معادله خط ریگریشن.

مثال (2): اگر x و y دارای همبستگی و معکوس باشند $S_x = S_y$ ، خط ریگریسیون y نسبت به x کدام است؟

حل: اگر y و x با هم همبستگی داشته باشند؛ پس درمی‌یابیم که ضریب تغییرات $r=\pm 1$ می‌باشد و $a=r\dfrac{S_y}{S_x}=\mp\dfrac{S_y}{S_x}$ است.

$$S_x=S_y$$

$$a=\pm\frac{S_y}{S_x}=\pm 1$$

$$y=ax+b$$

$$y=\pm x+b\left\}\begin{matrix} y=+x+b \\ y=-x+b \end{matrix}\right.$$

توزیع احتمال پواسن

یکی دیگر از توابع احتمال مهم مربوط به متحول تصادفی گسسته که بسیار کاربردی است توزیع دوجمله‌یی پواسن است. توزیع احتمال پواسن از نام ریاضی‌دان فرانسوی $Simeon-D.Poisson$ گرفته شده است. این توزیع احتمال، تعداد دفعات وقوع یک پیش‌آمد را در طول محدودهء پیوسته مشخص می‌کند. محدودهء پیوستهء مورد نظر ممکن است برحسب مورد، زمان، مساحت، حجم و غیره باشد. به عبارت دیگر از فورمول پواسن می‌توان برای محاسبه تقریبی m اشکال کامیابی از n آزمایش وقتی که n بزرگ و احتمال کامیابی p کوچک باشد استفاده کرد.

فورمول پواسن برای محاسبه تقریبی m اشکال در n آزمایش عبارت است از:

$$p=(X=m)=\frac{e^{-\mu}.\mu^m}{m!}$$

طوری که $\mu=np$ و e= 2,71828 است.

بخاطر داشته باشید که هم اوسط و هم واریانس توزیع پواسن برابر است به μ.

همچنان در نظر داشته باشد که فورمول پواسن را برای محاسبه احتمال تعداد مراجعات در زمان مشخص می‌توان بشکل ذیل طرح کرد:

$$p=(X=m)=\frac{e^{-\mu t}.\mu t^m}{m!}$$

مثال: تعداد مراجعین یک بانک به طور اوسط در یک ساعت 60 نفر باشد احتمال این که چهار نفر در سه دقیقه اول به بانک مارجعه کنند چقدر است؟

$$\mu = 60 \qquad m = 4 \qquad t = \frac{3}{60} \qquad \mu t = 60\frac{1}{20}$$

$$p(m=4) = \frac{e^{-\mu t}.\mu t^{m}}{m!} = \frac{(2{,}71828)^{-3}(3^{4})}{4!} = 0{,}168032$$

توزیع نورمال

توزیع نورمال یا توزیع گاوسی از جمله توزیع‌های پیوسته در نظریه احتمالات است. این توزیع صعود و نزول بسیاری از کمیت‌های فزیکی را حول یک مقدار ثابت نشان می‌دهد. منحنی‌های توزیع نورمال می‌توانند به چهار طریق تفاوت داشته باشند. شکل ریاضیکی معادله‌ی توزیع نورمال که نشان دهنده‌ی تابع توزیع احتمال آن $f(x)$ است به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^{2}} \qquad or \qquad f(x) = (x, \bar{x}, s)$$

$$e = 2.71828182... \qquad \pi = 3.14189...$$

$\bar{x}$ اوسط، s انحراف معیاری، و x مقادیر تصادفی پیوسته و $f(x)$ ارتفاع منحنی را نشان می‌دهند.

منحنی توزیع نورمال دارای خواص بسیاری جالبی است. از آن جمله که نسبت به محور عمود متقارن می‌باشد، نیمی از مساحت زیر منحنی بالای مقدار متوسط و نیم دیگر در پایین مقدار متوسط قرار دارد . این که هرچه از طرفین به مرکز مختصات نزدیک شویم احتمال وقوع بیشتر می‌شود.

خصوصیات توزیع نورمال

- اوسط، میانه و مد در توزیع نورمال با هم برابر هستند.
- مشتق مرتبه اول توزیع برای مقادیر کوچکتر از اوسط $(x < \mu)$ مثبت و برای مقادیر بزرگتر از اوسط $(x > \mu)$ منفی است. همچنین مشتق مرتبه اول توزیع در نقطه اوسط $(x = \mu)$ برابر با صفر است.
- سطح زیر منحنی در طول محور x مجموعا برابر با یک است.
- مقدار فرورفتگی در توزیع نورمال برابر با صفر است.
- مقدار کشیدگی اضافی توزیع نورمال برابر با صفر است.
- با دور شدن از اوسط، به اندازه چند انحراف معیاری، مقدار توزیع نورمال تقریبا به صفر میل می‌کند. سطح زیر منحنی بعد از سه انحراف معیار، تقریبا برابر 0.27 درصد کل زیر منحنی است.

نکات زیر بین اوسط و انحراف معیاری در منحنی نورمال صدق می‌کند:

- اگر $\bar{x}$ اوسط و S انحراف معیار باشد، در حدود 68% موارد مورد بررسی در فاصله‌ی $(\bar{x}-S, \bar{x}+S)$ یعنی به فاصله یک انحراف معیاری در اطراف اوسط قرار دارد.
- حدود 96% از موارد بررسی در فاصله $(\bar{x}-2S, \bar{x}+2s)$ یعنی به فاصله دو انحراف معیاری در اطراف اوسط قرار می‌گیرد.
- حدود 99% از موارد مورد بررسی در فاصله‌ی $(\bar{x}-3S, \bar{x}+3S)$ یعنی انحراف معیاری در اطراف اوسط قرار می‌گیرد.
- در یک منحنی نورمال انحراف بیش از $2S$ غیرعادی و انحراف بیش از $3S$ بسیار غیرعادی می‌باشد. دیتای که بیشتر از $3S$ از اوسط فاصله داشته باشد باید به عنوان یک دیتای تیت و پرک تلقی گردد.

مثال: اگر اوسط معاش کارمندان یک موسسه برابر مبلغ 12500 افغانی و انحراف معیاری برابر 700 افغانی باشد:

الف: با استفاده از فیصدی‌های توزیع نورمال توزیع معاش داده شده را شرح دهید.

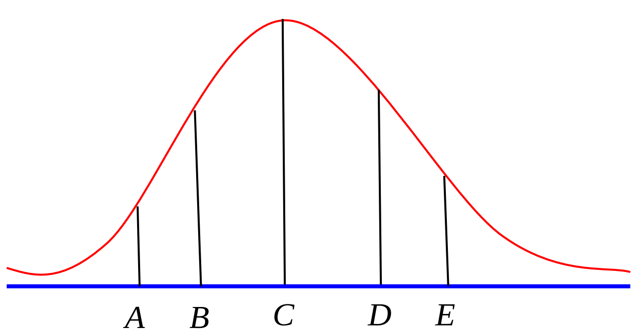
ابتدا مقادیر $(\bar{x}\pm S), (\bar{x}\pm 2S), (\bar{x}\pm 3S)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x}\pm S = 11800 - 13200 \Rightarrow 68\%$$
$$\bar{x}\pm 2S = 11100 - 13900 \Rightarrow 96\%$$
$$\bar{x}\pm 3S = 10400 - 14600 \Rightarrow 99.6\%$$

ب: آیا معاش معادل 14000 افغانی غیرعادی است یا خیر؟ چرا؟

نخست قیمت $14000-\bar{x}$ را محاسبه می‌کنیم که برابر است به 1500، یعنی معاش 14000 افغانی به اندازه 1500 افغانی بیشتر از اوسط است. حال اگر این رقم را به S تقسیم کنیم: $\frac{1500}{700}=2.1$، بنابر این معاش 14000افغانی از اوسط بیشتر است، بنا این معاش غیرعادی است.

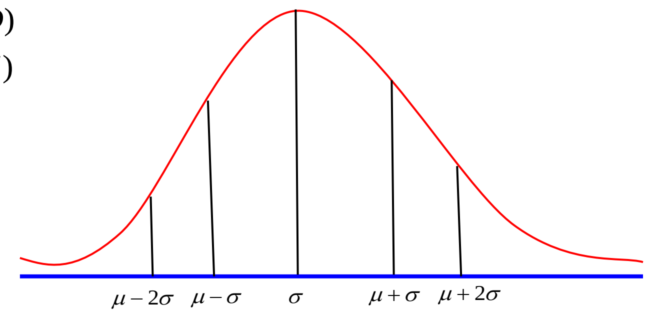
سوال: شکل زیر را در نظر بگیرید. موقعیت نقاط A، B، C، D و E را از جنس اوسط انحراف معیاری ارائه کنید.



حل: گراف فوق منحنی توزیع نورمال می‌باشد. هرگاه در توزیع نورمال $\mu=0$ و $\sigma=1$ شود، نورمال استاندارد می‌باشد.

نخست: انتروال‌ها را تشکیل می‌دهیم و با استفاده از μ و انحراف معیاری σ موقعیت‌های نقاط A, B, C, D, E را روی گراف تعیین می‌کنیم.

$$(\mu - \sigma < Z < \mu - \sigma) = (B, D)$$
$$(\mu + \sigma < Z < \mu + \sigma) = (A, E)$$



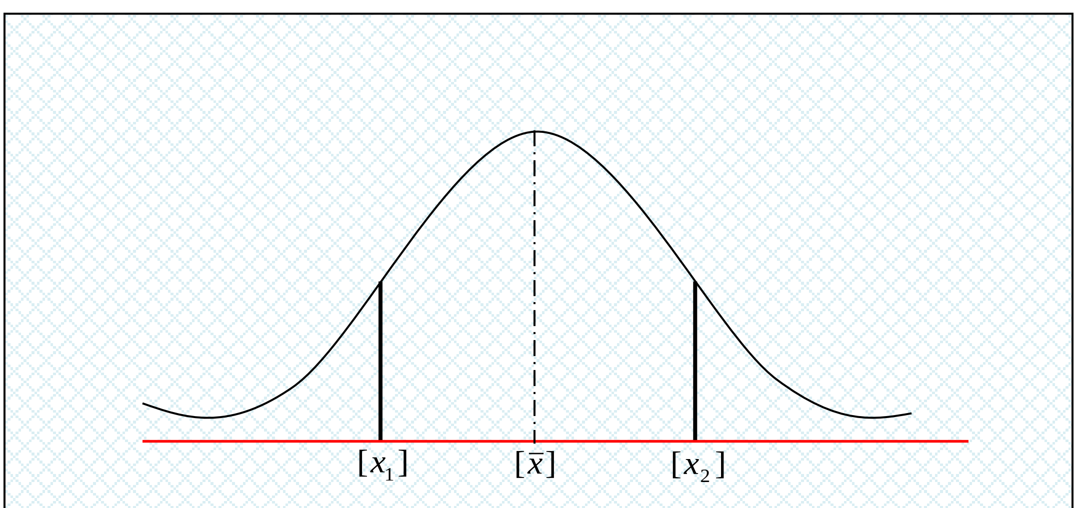
مساحت تحت منحنی نارمل و استندرد کردن آن

اگر متحول تصادفی پیوسته x دارای توزیع احتمال نارمل با اوسط $\bar{x}$ و انحراف معیار S باشد، احتمال این که متحول تصادفی x بین قیمت‌های x_1 و x_2 قرار گیرد عبارت است از:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, S)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{S}\right)^2} dx$$

به اساس تئوری انتیگرال مقدار عددی انتیگرال فوق مساوی است به مساحت محصور شده تحت منحنی نارمل و محور x در انتروال $[x_1, x_2]$ قرار شکل زیر:

مثال: اگر



باشد،

احتمال این

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1} N(x,50,5)dx = \int_{41} \frac{}{5\sqrt{2\pi}} e \; dx = ***$$

چون محاسبه‌ی انتیگرال فوق زمان‌گیر است، بنا از جداول احصائیوی تهیه شده در این مورد استفاده می‌شود، بنابراین که این کتاب برای کاندیدان کانکور طرح شده است، از حل طولانی و رجوع به جداول آن صرف نظر می‌کنیم.

یادداشت: قیمت‌های مربوط به متحول تصادفی x را که دارای توزیع نورمال است توسط رابطه زیر می‌توان معیاری ساخت:

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{S}$$

استفاده از این تعویض را معیاری ساختن متحول تصادفی x می‌نامند. Z را بنام متحول معیاری نورمال و منحنی را بنام منحنی نورمال معیاری شده و یا منحنی احتمال نورمال یاد می‌کنند. باید خاطرنشان ساخت که متحول معیاری شده Z همیشه دارای اوسط صفر و انحراف معیاری یک می‌باشد. مساحت زیر قسمتی از یک منحنی احتمال نورمال با احتمال تناسب مستقیم داشته و می‌توان با تعویض $Z = \frac{x - \bar{x}}{S}$ به صورت زیر نشان داد.

$$P(Z_1 < Z < Z_2) = \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-Z^2}{2}} dZ = \int_{Z_1}^{Z_2} N(Z,0,1) dZ$$

مثال: نمرات شاگردان در مضمون ریاضی دارای توزیع نورمال با اوسط 70 و انحراف معیار 8 است. با استفاده از جدول نورمال معیاری فیصدی نمرات بین 54 تا 84 را بدست آورید.

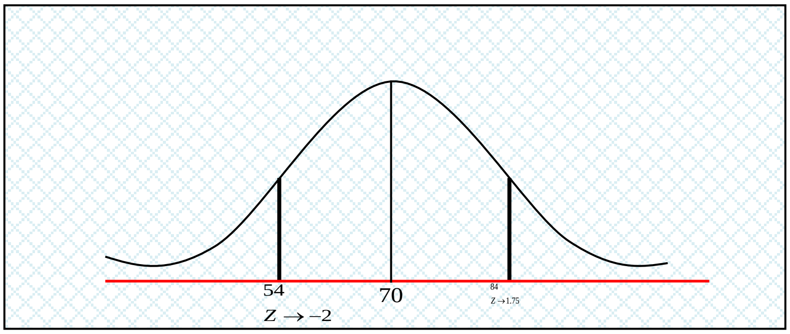
$$Z_1 = \frac{54 - 70}{8} = -2$$

$$Z_2 = \frac{84 - 70}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \le Z \le 1.75) \Rightarrow P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$$

$$\Rightarrow P(0 \le Z \le 1.75) = 0.4599$$

$$P(-2 \le Z \le 1.75) + P(0 \le Z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599 = 0.9371$$



قضیه لیمت مرکزی

اگر از یک جامعه بزرگ N با اوسط متناهی μ و واریانس متناهی δ^2 یک نمونه تصادفی n تایی انتخاب کنیم در این صورت اوسط نمونه یعنی $\bar{x}$ دارای توزیع تقریبا نورمال با اوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ و واریانس $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ و متحول تصادفی

$z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}}$ دارای توزیع نورمال معیاری است. در حالیکه ضریب $\dfrac{N-n}{N-1}$ برای قیمت‌های N به عدد 1 نزدیک شود در حقیقت لیمت آن که $n\to\infty$ مساوی به 1 است.

مثال: وزن جعبه‌های که توسط یک ماشین بسته‌بندی می‌شوند؛ دارای توزیع نورمال با اوسط $\mu=250g$ و انحراف معیار $\delta=20g$ می‌باشند. مطلوب است محاسبهء احتمال این که اوسط وزن یک نمونهء تصادفی $n=16$ تایی از جعبه‌ها کم‌تر از $240g$ باشد.

$$Z_n=\frac{\bar{x}_n-\mu}{\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}}=\frac{240-250}{\dfrac{20}{\sqrt{16}}}=\frac{-10}{5}=-2$$

$$p(\bar{x}\le 240)=p(Z_n\le -2)=0.9772$$

قیمت $p(-2)$ را از جدول 1 توزیع نورمال محاسبه می‌کنیم. طوریه که طرف چپ جدول در ستون اول سطر -2 یا 2 را پیدا می‌کنیم. بعدا طرف راست عدد 2 ستون 0.0 را پیدا می‌کنیم. دیده می‌شود که قیمت $p(-2)=0.9772$ می‌شود.

نمونه‌گیری

در روش‌های تحقیقاتی علمی، بررسی نمونه‌ای و تحقیقات آماری، نمونه‌گیری به پروسه‌ای گفته می‌شود که بر اساس آن انتخاب اعضای از جامعه‌ی احصائیوی صورت می‌پذیرد. این کار با هدف برآورد پارامتر جامعه و یا شناخت بیشتر از آن انجام می‌شود. اهمیت نمونه‌گیری را می‌توان صرفه‌جویی در زمان برای تهیه مشاهدات از جامعه به منظور تحقیق علمی دانست.

روش‌های گوناگونی برای نمونه‌گیری وجود دارد:

- نمونه‌گیری تصادفی: عناصر جامعه برای انتخاب شدن هم چانس هستند.
- نمونه‌گیری غیرتصادفی: اگر شیوه نمونه‌گیری با انتخاب اعضای نمونه بر اساس الگوی غیرتصادفی انجام شود، آن را بنام نمونه‌گیری غیر تصادفی یاد می‌کنند.

روش‌های نمونه‌گیری تصادفی

1) **نمونه‌گیری تصادفی ساده:** در نمونه‌گیری تصادفی ساده تمام عناصر جامعه دارای چانس یکسان هستند. در این حالت جامعه یکپارچه است و قابل تفکیک به بخش‌های مختلف نیست.

2) **نمونه‌گیری سیستماتیک:** در این نمونه‌گیری عناصر جامعه به صورت منظم شماره‌گذاری می‌شوند. در این گونه نمونه‌گیری، عناصر بر اساس یک ویژگی مرتب می‌شوند.

3) **نمونه‌گیری طبقه‌ای:** در این حالت جامعه به گروه‌های متجانس تقسیم می‌شوند.

4) **نمونه‌گیری خوشه‌ای:** اگر جامعه خیلی بزرگ باشد، آن را به خوشه‌های مختلف تقسیم و از هر خوشه نمونه-ای را انتخاب می‌کنیم.

روش‌های نمونه‌گیری غیرتصادفی

1) **نمونه‌گیری گلوله‌برفی:** در این روش اولین عضو نمونه، به طریقی انتخاب می‌شود که بیشترین ارتباط را با موضوع مورد تحقیق دارد. از طریق ارتباط این عضو با اعضای دیگر جامعه، امکان دسترسی به سایر نمونه‌ها میسر می‌شود.

2) **نمونه‌گیری اتفاقی:** در این حالت اعضای جامعه با توجه به قابل دسترس بودن در نمونه جای می‌گیرند.

3) **نمونه‌گیری متوالی:** اگر نمونه‌گیری را به صورتی انجام دهیم که با استفاده از یک یا چند شرط اعضای جامعه را محدود کرده و سپس آن را اجرایی کنیم، در اصل روش نمونه‌گیری متوالی را به کار بسته‌ایم.

4) **نمونه‌گیری قضاوتی:** در این روش محقق بر اساس نظر و پیشینه‌ای که در مورد اعضای جامعه دارد، دست به نمونه‌گیری می‌زند. انتخاب یا عدم انتخاب عضوی از جامعه در نمونه بسته به نظر محقق و تجربیات او دارد.

مثال: اگر حجم جامعه $N = 25$ باشد و بخواهیم نمونهء تصادفی 5 تایی از آن انتخاب کنیم، تعداد نمونه‌های بدست آمده چند خواهد بود؟

حل: هرگاه تعداد عناصر جامعه، N و تعداد عناصر نمونه، n باشد، پس تعداد نمونه‌هایی را که از یک جامعه تشکیل کرده می‌توانیم توسط فورمول زیر بدست می‌آوریم:

$$Samples = \binom{N}{n} \Rightarrow \binom{25}{5} = \frac{25!}{5!\cdot 20!} = \underline{53130}$$

مثال: فرض کنید از جامعه نمونه تصادفی برداشته‌ایم، چه فکر می‌کنید که با این نمونه چه باید بکنیم.

حل: در قدم اول برای نمونهء انتخاب شده یک متحول تصادفی را تعیین می‌کنیم، به اساس متحول تصادفی توزیع احتمال را پیدا می‌کنیم. توسط توزیع بدست آمده اوسط نمونه و انحراف معیاری نمونه را مشخص می‌کنیم. بعدا بر اساس اوسط، انحراف معیاری و واریانس نمونه، اوسط و واریانس جامعه را تعیین می‌کنیم.

توزیع اوسط نمونه

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونهء تصادفی از جامعهء تابع احتمال $f(x)$ باشد، در این صورت توزیع احتمال نمونهء تصادفی عبارت است از:

x	x_1	x_2	$...x_{n1}$
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

- اوسط متحول (اوسط تمام نمونه‌ها) $\overline{x_n}$ $\qquad E(\overline{x_n}) = \mu$
- واریانس متحول (رابطه میان معیار جامعه و انحراف معیار اوزیع اوسط نمونه) $\overline{x_n}$ $\qquad V(\overline{x_n}) = \frac{1}{n}\delta^2$
- واریانس نمونه $\qquad S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
- اوسط واریانس نمونه $\qquad E(S^2) = \delta^2$

در اینجا $\overline{x_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ اوسط نمونه، μ اوسط جامعه، δ^2 وریانس جامعه و S^2 وریانس نمونه اند.

مثال: فرض کنید جامعه‌ی متشکل از چهار عدد 2,4,6,8 باشد، در این صورت: توزیع، اوسط و واریانس این جامعه را محاسبه و سپس از این جامعه نمونهء تصادفی دوتایی با جای گزینی انتخاب و توزیع اوسط نمونه یعنی $\overline{X}$ را بدست آورید. گراف چند ضلعی کثرت آن را ترسیم و اوسط و واریانس $\overline{X}$ را حساب کنید.

$S = \{2,4,6,8\}$

x	2	4	6	8
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i) = 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{4} = \frac{13}{2}$$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot f(x_i) = 4\cdot\frac{1}{4} + 16\cdot\frac{1}{4} + 36\cdot\frac{1}{4} + 65\cdot\frac{1}{4} = 28$$

$$\operatorname{var}(x) = E(x^2) - \mu = 28 - \frac{13}{2} = 21.5$$

توزیع اوسط نمونه:

	(6,2)	(6,4)	(6,8)	(6,6)	(2,4)	(2,2)	(2,6)	(2,8)
$\overline{X}$	4	5	7	6	3	2	4	5

	(4,2)	(4,4)	(4,6)	(4,8)	(8,2)	(8,4)	(8,6)	(8,8)
$\overline{X}$	3	4	5	6	5	6	7	8

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8
$f^{'}(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

اوسط توزیع نمونه

$$\mu_{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_1} \cdot f(\overline{x_1}) = 2\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{2}{16} + 4\cdot\frac{3}{16} + 5\cdot\frac{4}{16} + 6\cdot\frac{3}{16} + 7\cdot\frac{2}{16} + 8\cdot\frac{1}{16} = 5$$

وریانس توزیع نمونه

$$\mathrm{var}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i^2} \cdot f(\overline{x_i}) = 17.375$$

توزیع نمونه نسبت

با توجه به آزمایش‌های برنولی که نتیجه‌ی هر آزمایش به شکل کامیابی و ناکامی می‌باشد، یک آماره‌ی مورد نظر در احصائیه تعداد کامیابی‌ها در n مشاهده نمونه‌یی می‌باشد. تعداد کامیابی‌ها را با متحول x و آماره‌ی نسبت نمونه را با $\bar{p}$ نشان می‌دهیم.

$$\bar{p} = \frac{x}{n} \qquad , \qquad 0 < \bar{p} < 1$$

$$f(x) = f(n\bar{p}) = \binom{n}{n\bar{p}} p^{n\bar{p}} (1-q)^{n(1-\bar{p})}, \qquad \bar{p} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$$

اوسط و وریانس متحول‌های تصادفی $\bar{p}$ را طور زیر بدست می‌آوریم:

$$\mu_p = E(\bar{p}) = E(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n} E(x) = \frac{1}{n} np = p$$

$$\delta_p^2 = V(\bar{p}) = V(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n^2} \cdot V(x) = \frac{1}{npq} = \frac{pq}{n} = \frac{p(q-1)}{n}$$

$$NOTE: \quad E(x) = np \quad , \quad V(x) = npq$$

توزیع‌های نورمال معیاری توزیع نمونه‌ی نسبت را قرار زیر پیدا می‌کنیم:

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

سوالات حل شده

1. دو سکه را چهار مرتبه با هم پرتاب می‌کنیم و تعداد خطها را در نظر بگیرید:
   1) متحول‌های تصادفی را بصورت تابع نشان دهید.
   2) احتمال هریک از پرتاب ها را با نمونه نسبت دهید.
   3) تابع احتمال گسسته و تجمعی آن را بنویسید.

✓ همان طوری که می‌دانیم متحول‌های تصادفی تابعی است که ناحیه تعریف آن فضایی نمونه آن است و ناحیه ارزش-های آن اعداد حقیقی است. هرگاه دو سکه چهر مرتبه پرتاب شود فضایی نمونه آن قرار ذیل خواهد بود، در صورتی که H شیر فرض شود و T خط فرض گردد:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

- اگر HH بیاید احتمال , تعداد خطها دو است
- اگر HT و یا TH بیاید احتمال خطها یک است.
- اگر TT بیاید احتمال خطهای 2 است.

✓ اکنون احتمال هر یک از پرتاب‌ها را با فضایی نمونه آن ارتباط می‌دهیم.

x	0	1	2
F(X)	$1/4$	$2/4$	$1/4$

✓ تابع احتمال تجمعی آن:

$$f(X) = \sum_{xi<X} f(xi) = `.4 + 2.4 + 1.4 = 1$$

2. هرگاه احتمال ناقص بودن یک جوره بوت $P = 0,1$ باشد، اوسط و انحراف معیاری، بوت های ناقص را در یک نمونه 400 جوره بوت دریافت کنید.

$P = 0,1 \quad n = 400 \qquad \mu = np \qquad \sigma = \sqrt{n.p.q}$

انحراف معیاری= $\sqrt{400 .0,1 .0,9} = 6$ اوسط= $\mu = 400 . 0,1 = 40$

3. در ذخیره خانه یک شرکت به تعداد 500 پایه کمپیوتر وجود دارد که از آن جمله 50 پایهء آن نواقص دارد. یک مشتری 10 پایه از این کمپیوترها را میخرد، احتمال این که وی 8 پایه سالم را خریده باشد چقدر است؟

جواب:

اگر n تعداد کمپیوتر های خریده شده باشد.

اگر m تعداد کامپیوتر های سالم خریده شده باشد.

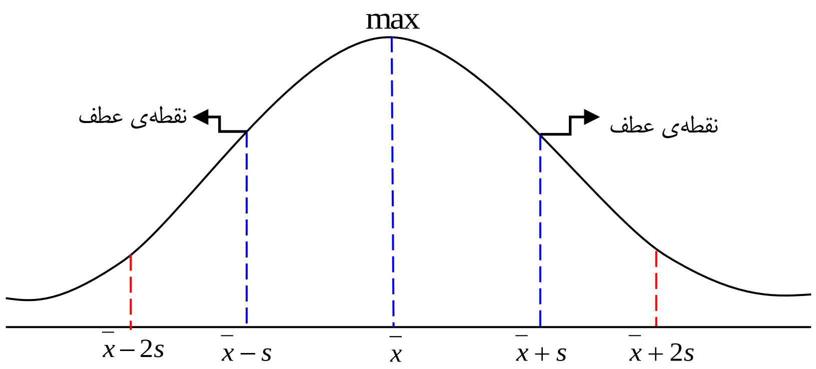
اگر p احتمال کامپیوتر ناسالم در کامپیوتر های خریده شده.

اگر q احتمال کامپیوتر های سالم خریده شده باشد.

$$P(X=m) = \binom{10}{8}(0,1)^8.(0,9)^2 = \frac{10!}{2!.8!}(0,1)^8.(0,9)^2 = 0,000036$$

4. از اطلاعات زیر که مربوط به دو پارامتر اوسط و انحراف معیاری می‌شود برای رسم یک توزیع نورمال استفاده نمائید.

ابتدا یک محور افقی رسم کنید و نقاط $\bar{x}$، $\bar{x}+s$، $\bar{x}-s$، $\bar{x}+2s$ و $\bar{x}-2s$ را بر روی آن محور مشخص کنید. سپس نقطه‌ی را به ارتفاع اختیاری h در بالای $\bar{x}$ در نظر بگیرید. اکنون در بالای $\bar{x}+s$ نقطه به ارتفاع $0.6h$ انتخاب کنید. یعنی نقطهء با مختصات $(\bar{x}+s, 0.6h)$ چون منحنی نورمال متناظر است همین عمل را در خصوص $\bar{x}-s$ نیز انجام دهید. حال در بالای $\bar{x}+2s$ و $\bar{x}-2s$ دو نقطه به ارتفاع h و $0.15h$ در نظر بگیرید. متوجه باشید که برای رسم دقیق منحنی نورمال باید اعداد $0.6067h$ و $0.1354h$ به جای $0.6h$ و $0.15h$ مورد استفاده قرار گیرند. در نتیجه این نقاط را توسط یک خط منحنی به هم وصل کنید و بگویید که این منحنی در کدام فاصله‌ها محدب و در کدام فاصله‌ها مقعر است؟



توزیع در فاصله‌ی داده شده محدب و بیرون از انتروال آن مقعر می‌باشد.

5. یک مطالعه در شفاخانه نشان می‌دهد که تعداد متوسط مراجعین بین 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه 25 نفر است، فرض کنید که توزیع احتمال پواسن در این حالت صدق نماید.

- توزیع احتمال تعداد مراجعین شفاخانه بین ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه باشد را بدست آرید و گراف آنرا رسم کنید، آیا این توزیع خمیده است؟
- مقدار اوسط و انحراف معیار این توزیع را بدست آرید.
- آیا ممکن است که بیش از 7 نفر بین ساعات 6 الی 8 بعد از ظهر روز شنبه به شفاخانه مراجعه کنند؟

جواب:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}.\mu^{x}}{X!}=\frac{e^{-25}.25^{x}}{x!}=P(\,x\le 7)=\sum_{x=0}^{7}\frac{e^{-25}.25^{x}}{X!}$$
$$=\ e^{-25}\left(\frac{25^0}{0!}+\frac{25^1}{1!}+\frac{25^3}{2!}+\frac{25^3}{3!}+\frac{25^4}{4!}+\frac{25^5}{5!}+\frac{25^6}{6!}+\frac{25^7}{7!}\right)$$
$$=\ e^{-25}(1+25+312{,}5+2604{,}17+16275{,}04+81380{,}21+339084{,}20+1211015)$$
$$=0{,}0000229$$
$$=>p(X\le 7)=0{,}0000229$$
$$P(X>7)=1-P(x\le 7)=1-0{,}0000229=0{,}9999771$$

6. فرض کنید تعداد اشتباهات یک صفحه از یک کتاب دارای توزیع پواسن با پارامتر $\mu=\frac{1}{2}$ است, مطلوب است محاسبه احتمال این که:

- حد اقل یک اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.
- دقیقا 5 اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.
- بین 3 الی 6 اشتباه تایپی در این صفحه وجود داشته باشد.

✓ اقلا یک اشتباه تایپی در یک صفحه موجود باشد. $k=1$

برای محاسبهء قیمت $e^{-\frac{1}{2}}$ از ماشین حساب استفاده می‌کنیم.

$$f(k,h)=\frac{\mu^k \cdot e^{-k}}{k!} \Rightarrow f(1,\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^1 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{2!}=0.3$$

طوری که در جز اول ذکر شد حداقل یک اشتباه تایپی یعنی می‌تواند 2 اشتباه، 3 اشتباه، 4 اشتباه، 5اشتباه و یا 6 اشتباه تایپی در یک صفحه وجود داشته باشد. در قدم اول احتمال هر یک را جداگانه محاسبه می‌کنیم، بعدا تمام احتمال‌ها را جمع می‌کنیم.

$$f(2,\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{2!}=0.15 \qquad f(3,\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^3 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{3!}=0.012$$

$$f(4,\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^4 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{4!}=0.0015 \qquad f(5,\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^5 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{5!}=0.00016$$

$$f(6,\frac{1}{2})=\frac{(\frac{1}{2})^6 \cdot e^{-\frac{1}{2}}}{6!}=0.000013$$

✓ احتمال حداقل بودن یک اشتباه تایپی در یک صفحه عبارت است از:

$$f(1,\frac{1}{2})+f(2,\frac{1}{2})+f(3,\frac{1}{2})+f(4,\frac{1}{2})+f(5,\frac{1}{2})+f(6,\frac{1}{2})$$
$$\Rightarrow 0.30+0.15+0.012+0.0015+0.00016+0.000013=0.46$$

✓ احتمال این که از 3 الی 6 اشتباه تایپی در یک صفحه موجود باشد:

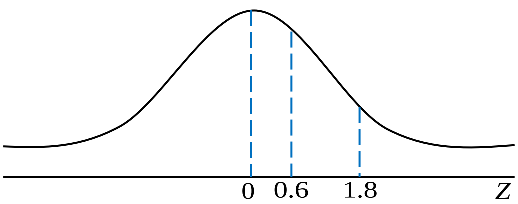
$$f(3,\frac{1}{2})+f(4,\frac{1}{2})+f(5,\frac{1}{2})+f(6,\frac{1}{2})$$
$$\Rightarrow 0.012+0.0015+0.00016+0.000013=0.013$$

7. فرض کنید که قطر پیستون‌های که توسط ماشین اتوماتیکی ساخته می‌شود، به طور نورمال با اوسط 25 میلی‌متر و انحراف معیار 0.5 میلی متر توزیع شده اند.

- احتمال این که قطر پیستون بین 25.2 تا 25.9 میلی‌متر باشد، چقدر است؟
- چه نسبتی از پیستون ساخته شود، چند دانهء آن‌ها انتظار می‌رود که قطری کم‌تر از 24.07 میلی‌متر داشته باشد؟
- چه فیصدی از پیستون‌های تولیدی قطر معادل 24.56 میلی‌متر یا بیشتر دارند؟

✓ جز اول:

$$\left.\begin{array}{l}\mu = 25mm\\ \sigma = 0.5mm\\ x_1 = 25.2\\ x_2 = 25.9\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Z_1 = \dfrac{x_1-\mu}{\sigma} = \dfrac{25.2-25}{0.5} = 0.4\\ Z_2 = \dfrac{x_2-\mu}{\sigma} = \dfrac{25.9-25}{0.5} = 1.8\end{array}$$



حال احتمال بودن قطر پیستون میان 25.2 و 25.9 را محاسبه می‌کنیم.

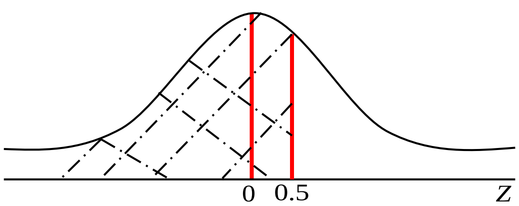
$$p(Z) = \begin{cases} Z_1 \le Z \le Z_2 & , \quad 0 \le Z_2\\ p(Z_{2)} = p(Z_1) & , \quad 0 \le Z_1\end{cases}$$

$$p(Z_1 \le Z \le Z_2) = p(Z_{2)} - p(Z_1) \Rightarrow p(1.8) - p(0.4) \Rightarrow 0.4641 - 0.1554 = 0.3087$$

✓ جز دوم:

$$\left.\begin{array}{l} 25 \ge x\\ \sigma = 0.5mm\\ \mu = 25mm\\ x = 25\end{array}\right\} \Rightarrow Z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{25-25}{0.5} = 0.4 \qquad \begin{array}{c} p(Z_1 \le 0) = 0.5 + p(0) = 0.5\\ p(25 \ge x) = p(0 \ge z)\end{array}$$

طوری که دیده می‌شود $Z_1 \le 0$ تمام مساحت طرف چپ منحنی را نشان می‌دهد. یعنی مساحت در یک انتروال محدود نمی‌باشد. پس برای قیمت $Z = 0$ از جدول یک موجود در کتاب مکتب استفاده می‌کنیم و یا اگر از جدول دوم استفاده کنیم، با قیمت به دست آمده عدد 0.5 را جمع نمی‌کنیم. نظر به جدول یک قیمت $p(Z \le 0) = p(Z) + 0.5 = 0.5$ می‌باشد.



✓ جز سوم:

$$\left.\begin{array}{l} 24.07 \ge x\\ \sigma = 0.5mm\\ \mu = 25mm\\ x = 24.07\end{array}\right\} \Rightarrow Z_1 = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{24.07-25}{0.5} = -1.86$$

برای پیدا کردن قیمت $p(1.86)$ از جدول یک توزیع نورمال که در کتاب مکتب است، استفاده می‌کنیم. طوری که در ستون اول طرف چپ جدول سطر 1.8 ار پیدا می‌کنیم. بعدا به طرف راست عدد 1.8 ستون 6 را پیدا نموده، دیده می‌شود که قیمت $p(1.86)$ عبارت از 0.9686 می‌باشد.

سوالات بخش آزمون کانکور

1) اگر یک تجربه توسط افراد مختلف انجام شود:

1. نتایج این تجارب از هم مختلف است.
2. نتایج این تجارب در هر حالت صفر است.
3. نتایج این تجارب یکسان است.
4. نتایج این تجربه در هر حالت یک است.

2) اگر برای دیتای داده شده، چارک اول و چارک سوم به ترتیب 22.5 و 30.75 باشد، انحراف این چارک‌ها Q عبارت اند از:

1. $Q=10$
2. $Q=9$
3. $Q=8.25$
4. $Q=8$

3) میانه دست دیتای 15,18,21,25,1,4,8,11 عبارت است از:

1. 21
2. 25
3. 29
4. 15

4) پیداوار یک فارم زراعتی در پنج سال گذشته 18,15,12,1617 تن می‌باشد. اوسط حسابی آن را پیدا کنید.

1. 15
2. 13.6
3. 18
4. 15.6

5) در کوته سنگی شهر کابل بین ساعات 10 و 12 قبل از ظهر بکس جیبی احمد را کیسه‌بر برده است. بعد از اطلاع به پولیس معلومات اولیه پولیس روشن ساخت که در این محل سه نفر کیسه‌بر به نام‌های x, y و z با پولیس سابقه جنایی نیز دارند در محل دیده شده اند. در رابطه به مسئله داده فوق چند امکان وجود دارد؟

1. یک امکان
2. هفت امکان
3. سه امکان
4. هشت امکان

6) به چند طریق می‌توانند که 6 نفر دور یک میز غذاخوری بنشینند؟

1. 710
2. 64
3. 120
4. 720

7) در یک شهر در جریان پنج روز تعداد تصادفات ترافیکی 12,19,18,16,15 می‌باشد، کوچکترین دیتا عبارت است از:

1. 12
2. 16
3. 15
4. 18

8) در یک سالون امتحان 16 نفر شاگرد از صنوف مختلف بخاطر اخذ امتحان سویه گردهم جمع گردیده اند. به چند شکل می‌توانند به عقب 16 میز با هم بنشینند؟ در صورتی که تغییر محل هر شاگرد به حیث یک حالت در نظر گرفته شود.

1. 16
2. !16
3. !15
4. 20

9) اگر تعداد دیتاها تاق باشد، میانه دیتاها عبارت است از:

1. میانه دتاها عبارت از دیتای آخر است.
2. میانه دیتاها عبار از دیتای مابینی است.

3. میانه دیتاها عبارت از دیتای اولی است. 4. هر دیتا عبارت از میانه است.

10) می‌خواهیم نمرات ریاضی یک صنف را ارزیابی نماییم، به کدام روش بهتر است اطلاعات را جمع‌آوری کنیم؟

1. نمرات از از دفتر ثبت نتایج ملاحظه می‌کنیم. 2. از پدر شاگردان پرسان می‌کنیم.

3. از اول نمره تا پنجم نمره صنف پرسان می‌کنیم. 4. از هر شاگر نمره ریاضی‌شان را پرسان می‌کنیم.

11) فورمول پواسن برای محاسبه تقریبی احتمال m اشکال کامیابی از n آزمایشی وقتی که n بسیار بزرگ و احتمال کامیابی p بسیار کوچک باشد، عبارت است از:

1. $p(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}, m=np$ 2. $p(x=m)=\frac{e^{\lambda}\lambda^{-m}}{m!}, m=np$

3. $p(x=m)=\frac{e^{\lambda}\lambda}{m!}, m=np$ 4. $p(x=m)=\frac{e^{\lambda}\lambda^m}{m!}, m=np$

12) با استفاده از ارقام 8,7,6,5,4,3.2,1,0 و 9 چند نمر تلفون شش رقمی (بدون تکرار ارقام) به شرطی که شماره از چپ به راست 0799 باشد، می‌توان ساخت؟

1. 90 2. 100 3. 80 4. 70

13) هرگاه E یک حادثه اتفاقی باشد، کدام یک از جواب‌های زیر درست است؟

1. $0\le p(E)\le 1$ 2. $0\le p(E)\le 2$ 3. $p(E)=0$ 4. $p(E)=2$

14) در یک خریطه شش گلوله به رنگ سرخ، سه گلوله به رنگ سبز و یک گلوله به رنگ سیاه قرار دارد، دو گلوله یکی پی دیگری از خریطه کشیده می‌شود و بعد از مشاهده دوباره در خریطه انداخته می‌شود. احتمال این که هر دو مرتبه گلوله‌ها سرخ باشند، عبارت است از:

1. $\frac{6}{36}$ 2. $\frac{9}{25}$ 3. 4 4. $\frac{1}{36}$

15) در یک خریطه شش گلوله به رنگ سرخ (r) ، سه گلوله به رنگ سبز (g) و یک گلوله به رنگ سیاه (b) قرار دارد، یک گلوله را برای چهار مرتبه به صورت تصادفی از خریطه بیرون می‌کنیم، طوری که بعد از گرفتن گلوله دوباره در خریطه انداخته می‌شود، احتمال حادثه $w=(gbrr)$ عبارت است از:

1. $\frac{1}{108}$ 2. $\frac{12}{72}$ 3. $\frac{1}{5^4}$ 4. $\frac{27}{2500}$

16) در یک خریطه ده گلوله به رنگ سرخ (r) ، هشت گلوله گلوله به رنگ سبز (g) و دو گلوله به رنگ سیاه (b) قرار دارد، یک گلوله را برای چهار مرتبه به صورت تصادفی از خریطه بیرون می‌کنیم، طوری که بعد از گرفتن گلوله دوباره در خریطه انداخته می‌شود، احتمال حادثه $w=(bggb)$ عبارت است از:

1. $\frac{625}{7^4}$ 2. $\frac{625}{7^3}$ 3. $\frac{4}{2500}$ 4) $\frac{3}{14^2}$

17) اگر دیتای جمع‌آوری شده مربوط متحول پیوسته (متمادی) دسته‌بندی شده باشد، در اینصورت:

1. سرحد بالای یک دسته با سرحد پایانی دسته‌ای ماقبل آن برابر است.
2. سرحد پایانی یک دسته با سرحد پایانی دسته‌ای ماقبل آن برابر است.
3. سرحد بالای یک دسته با سرحد بالای دسته‌ای ماقبل آن برابر است.

4. سرحد بالای یک دسته با سرحد پایانی دسته‌ای مابعد آن برابر است.

18) مجموع کثرت نسبی تمام حالات یم تجربه تصادفی همیشه:

1. مساوی به یک است 2. صفر است 3. بزرگتر از یک است 4. کوچکتر از یک است

19) احتمال این که آفتاب از مشرق طلوع کند چند است؟

1. صفر 2. 0.3 3. 0.5 4. یک

20) هرگاه اعضای نمونه به صورت منظم نمونه‌گیری شده باشند، این عمل را:

1. نموه‌گیری خوشه‌ای گویند. 2. نمونه‌گیری سیستماتیک گویند.

3. نمونه‌گیری غیرتصادفی گویند. 4. همه درست است.

21) در داخل یک خریطه هزار دانه سکه انداخته شده است که روی آن‌ها 1 الی 1000 نوشته شده است، هرگاه از خریطه یک سکه بیرون آورده شود، چقدر احتمال دارد که یک عدد چهار رقمی باشد؟

1. $\frac{4}{1000}$ 2. $\frac{10}{1000}$ 3. $\frac{1}{1000}$ 4. هیچ‌کدام

22) اعداد 7,6,5,4,3,2,1 داده شده است، به کمک آن‌ها چند عدد تاق بدون ارقام می‌توان ساخت؟

1. 480 2. 2160 3. 2260 4. 2520

23) با استفاده از ارقام 4,3,2,1,0 امکان ساخت چند عدد دو رقمی وجود دارد؟

1. 20 امکان 2. 16 امکان 3. 8 امکان 4. 15 امکان

24) در یک خریطه سه مهره سفید، چهار مهره سبز و پنج مهره سیاه است، از خریطه یک مهره بیرون می‌آوریم، مطلوب است احتمال این که مهره سفید باشد.

1. $\frac{5}{12}$ 2. $\frac{7}{12}$ 3. $\frac{11}{12}$ 4. $\frac{3}{12}$

25) از 3 دیتای: الف، ب و ج کدام آن جامعه دو متحوله و کدام آن جامعه سه متحوله است؟

الف) $\{8,6,4,2\}$ ب) $(2,4),(4,8),(6,12),(8,16)$ ج) $(2,4,3),(4,8,1),(6,12,13),(8,16,20)$

1. الف جامعه سه متحوله و ب ک متحوله است. 2. ج جامعه سه متحوله و ب جامعه دو متحوله است.

3. الف و ب هردو جوامع دو متحوله هستند. 4. الف و ب هردو جوامع سه متحوله هستند.

26) در هستوگرام مساحت هر مستطیل عبارت است از:

1. کثرت دسته ضرب در طول دسته 2. کثرت دسته ضرب در ارتفاع

3. کثرت دسته ضرب در مرکز انحنا 4. کثرت دسته ضرب در دوچند ارتفاع

27) به هر مقداری که از طریق مشاهده و یا اندازه‌گیری بدست می‌آید:

1. جامعه گویند. 2. پارامتر گویند. 3. دیتا گویند. 4. نمونه گویند.

28) ناحیه تعریف توزیع تابع احتمال عبارت است از:

1. اعداد حقیقی 2. اعداد تام 3. فضای نمونه 4. اعداد طبیعی

29) با استفاده از اعداد 7,8,5,6,2,9,1,4 چند عدد چهار رقمی (بدون تکرار) را تشکیل نموده می‌توانیم؟

1. 1680 2. 411 3. 61 4. 2080

30) برای مقایسه دو گروه از افراد که اوسط حسابی آن‌ها مساوی اند، باید:

1. مود گروه‌ها دریافت شود. 2. میانه گروه‌ها دریافت گردد.

3. وسعت $Range$ گروه‌ها دریافت شود. 4. اوسط هندسی گروه دریافت گردد.

31) نمونه توسط یکی از جوابات زیر تعریف می‌گردد:

1. بخشی از جامعه است که تمام خواص و صفات کل جامعه را نداشته باشد.
2. بخشی از جامعه است که تمام خواص و صفات کل جامعه را داشته باشد.
3. بخشی از جامعه است که غیر متجانس بوده و بعضی از خواص و صفات جامعه را دارا باشد.
4. بخشی از جامعه است که بعضی از خواص و صفات کل جامعه را دارا باشد.

32) در ماه ثور سال گذشته پنج روز ابری و بارانی بوده، کثرت نسبی روزهای ابری و بارانی در ماه قوس عبارت است از:

1. 0.161 2. 0.461 3. 0.561 4. 0.261

33) هر گاه ضریب ارتباط بین دو متحول مساوی به -0.9 باشد، در اینصورت:

1. بین متحول‌ها رابطه ضعیف و مستقیم موجود است. 2. بین متحول‌ها رابطه قوی و مستقیم موجود است.

3. بین متحول‌ها رابطه قوی و مستحکم موجود است. 4. بین متحول‌ها رابطه ضعیف و معکوس موجود است.

34) اگر اوسط در سمت میانه واقع باشد، در این صورت مود یا نما:

1. در سمت راست میانه قرار دارد. 2. هر سه جواب درست است.

2. در بالای میانه قرار دارد. 4. در سمت چپ میانه قرار دارد.

35) دانه مکعبی دارای شش سطح برابر که در هر سطح آن اعداد $6,5,4,3,2,1$ ثبت است. چهار مرتبه انداخته می‌شود که مرتبه اول عدد 5 و مرتبه دوم عدد 5، مرتبه سوم 1 و مرتبه چهارم عدد 5 ظاهر می‌شود. پس S فضای نمونه آن عبارت است از:

1. $S=\{5,5,2,4\}$ 2. $S=\{5,5,1,5\}$ 3. $S=\{2,3,1,3\}$ 4. $S=\{6,5,2,2\}$

36) اوسط دیتاها برابر 15 است و انحراف معیار آن 6 است، پس ضریب تغییرات عبارت است از:

1. $CV=0$ 2. $CV=\frac{1}{2}$ 3. $CV=\frac{2}{5}$ 4. $CV=\frac{3}{2}$

37) بلندی قد یک گروپ ده نفری به حساب سانتی‌متر طور زیر نشان داده شده است:

$177,152,159,156,170,175,177,151,170,156$، فریکوینسی اعداد 170 و 156دریافت کنید.

1. 1 و 3 2. 2 و 3 3. 2 و 1 4. 2 و 2

38) اگر تعداد عناصر ست A مساوی به 2 و تعداد عناصر ست B مساوی به 2 باشد، از ست A و B تعداد تمام روابط مساوی است به:

1. 10 2. 15 3. A 4. 16

39) در یک توزیع نمرات $\bar{x} > med > \mathrm{mod}$ باشد، پس منحنی توزیع کدام یکی از اشکال زیر است؟

1. تقریبا متناظر است 2. میلان مثبت 3. نارمل 4. میلان منفی

40) یک فامیل سه فرزند دارد، احتمال این که یکی آن پسر و بقیه دختر باشد چقدر است؟

1. $\frac{3}{8}$	2. $\frac{1}{8}$	3. $\frac{1}{16}$	4. $\frac{5}{8}$

41) اگر p محل دیتا و n تعداد دیتا باشد، پس فورمول محل چارک عبارت است از:

1. $C_{QP}=\frac{p}{4}+\frac{1}{2}$	2. $C_{QP}=\frac{p\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$	3. $C_{QP}=\frac{p}{4}$	4. هیچ‌کدام

42) اگر واریانس یک دیتا 5.29 باشد، پس انحراف معیاری آن عبارت است از:

1. 2.6	2. 2.5	3. 2.3	4. 2.8

43) اگر دیتا مساوی به $60,80,115,56$ باشد، پس اوسط دیتا مساوی است به:

1. 82.5	2. 77.5	3. 80	4. 87.7

44) هرگاه شرکت ترانسپورتی (الف) در لین کابل – مزار پنج عراده بس و در لین مزار – فاریاب سه عراده بس داشته باشد، به چند طریق می‌توانیم توسط سرویس این شرکت از کابل به فاریاب صفر نماییم؟

1. به ده شکل	2. به بیست شکل	3. به پانزده شکل	4. به دوزاده شکل

45) در ست دیتای $1,13,4,5,6,9,3,10$ مقدار $\sum(X_i-\overline{X})$ مساوی است به:

1. 23	2. 12	3. 9	4. 0

46) اگر x_i متحول تصادفی و $f(x_i)$ تابع و $E(x)$ اوسط تابع احتمال باشد، انحراف مربعات متحول تصادفی از اوسط آن عبارت است از:

1. $\sum x_i f(x_i)$	2. $[x_i+E(x)]^2$	3. $[x_i-E^2(x)]^2$	4. $[x_i-E(x)]^2$

47) احتمال شفا یافتن مریض از مرض شکر 0.4 است. اگر پانزده نفر به این مرض مصاب باشند با استفاده از آزمایش برنولی احتمال این که از 3 الی 4 نفر شفا یابد چند است؟

1. $p(3\le x\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^t(0.6)^{15-t}$

2. $p(3\le x\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)(0.6)^{15-t}$

3. $p(3\le x\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}$

4. $p(3\le x\le 4)=\sum_{i=1}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^t(0.6)^{15-t}$

48) کثرت نسبی شیر آمدن یک سکه عبارت از $\frac{a}{A}$ و کثرت نسبی خط آمدن آن $\frac{b}{B}$ است، اگر تعداد تجارب انجام شده n باشد، مجموع کثرت نسبی عبارت است از:

1. $\frac{a}{A}+\frac{b}{B}=1, n=A$	2. $\frac{a}{A}+\frac{b}{B}=\frac{1}{2}, n=A$	3. $\frac{a}{A}+\frac{b}{B}=\frac{1}{5}, n=A$	4. $\frac{a}{A}+B=1, n=A$

49) در دیتای $2,4,6,8,10,12,14$ مود مساوی است به:

1. 10	2. 6	3. 8	4. مود ندارد.

50) برای این که یک نمونه از جامعه نمایندگی کرده نتواند کافی است که:

1. در سه جواب این سوال غلط است.
2. انتخاب هر فرد یا شی به عنوان عضوی از نمونه امکان‌پذیر نباشد.

3. تمام اعضای جامعه به عنوان هضو جامعه سهم برابر نداشته باشد.

4. قبل ا انتخاب نمونه بتوانیم در مورد نمونه قضاوت کنیم.

51) فرض کنید که از یک مشاهده دیتای 90,85,80,120,100,140 (از چپ به راست) مقدار ربع اول عبارت است از:

1. 120 	2. 85 	3. 100 	4. 90

52) تعداد تریتب n عنصر در صورتی که تکرار مجاز نباشد، بنام پرموتیشن n یاد شده و به p_n نشان داده می‌شود و عبارت است از:

1. $P_n=(n+1)!$ 	2. $P_n=(n-1)!$ 	3. $P_n=(n-2)!$ 	4. $P_n=n!$

53) ماشین موترها هنگام سوخت تیل مقدار آلودگی‌های مضره را از خود انتشار می‌دهد که یک سدته از این آلودگی‌ها عبارت است از:

1. اکسایدهای نایتروجن 	2. کاربن مونواکساید 	3. گاز امونیا 	4. کاربن دای اکساید

54) یک فضای نمونه دارای P عضو است، چند مجموعه‌ی فرعی دارد؟

1. $P!$ 	2. 2^P 	3. p^2 	4. هیچ‌کدام

55) به تعداد 200 مسافر تکت طیاره گرفته، اگر احتمال نیامدن مسافری که تکت گرفته طبق تجارب گذشته 0.01 باشد، احتمال این که 3 مسافر نیاید به کمک فورمول پواسن چقدر است؟

1. $p(3)=\frac{2.718\cdot 2^3}{3!}$ 	2. $p(3)=\frac{2.718\cdot 4^3}{4!}$ 	3. $p(3)=\frac{(2.718)^{-2}\cdot 2^3}{3!}$ 	4. $p(3)=3$

56) در یک شهر که صدهزار نفر واجد شرایط رأی دهی اند، سه نفر برای پست شاروالی با هم رقابت می‌کنند. در این رقابت نفر اول 30%، نفر دوم 50% و نفر سوم 20% رأی گرفته اند. مد مربوط به این رأی اخذ شده، عبارت است از:

1. 50% 	2. 2% 	3. 30% 	4. 20%

57) بر اساس تجارب، شانس اتفاق افتادن بیانیه " هر هم‌صنفی ما روزانه یک گیلاس شیر می‌نوشند" کدام گزینه است؟

1. ممکن نیست 	2. قطعا نمی‌نوشند 	3. امکان دارد 	4. حتمی است

58) در جدول زیر کثرت نسبی تعداد شاگردان یک صنف نظر به حرف اول نام آن‌ها جابجا شده است، کثرت مطلق حرف "ل" و "ع" به ترتیب عبارتند از:

کثرت نسبی تعداد شاگردان	حرف اول نام شاگرد
0.1	ع
0.2	م
0.25	س
0.35	ش
0.1	ل

1. 10,10 	2. 20,35 	3. 10,1 	4. 20,10

59) اگر $y=ax+b$ معادله خط رگرسیون، $\bar{x}$ اوسط مقادیر x و $\bar{y}$ اوسط مقادیر y باشند، در این صورت a و b از کدام یک از فورمول‌های زیر بدست می‌آید؟ (طوری که r ضریب همبستگی بین x و y، و S_x و S_y به ترتیب انحراف معیار x و y می‌باشد)

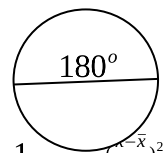
1. $a=r\frac{S_y}{S_x}, b=\bar{y}-a\bar{x}$ 	2. هر سه جواب غلط است.

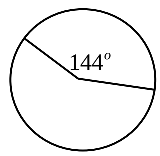
3. $a = r\frac{S_y}{S_x}$ 4. $b = \bar{y} - a\bar{x}$

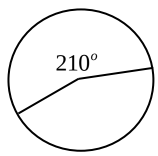
60) توزیع توابع احتمال که در احصائیه و احتمالات مورد بحث قرار می‌گیرد، عبارت از تابعی است که:

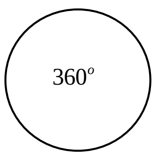
1. یک تابع ثابت است.
2. یک تابع مثلثاتی است.
3. ناحیه تعریف آن فضای نمونه و ناحیه قیمت‌های آن اعداد حقیقی است.
4. ناحیه تعریف آن اعداد حقیقی و ناحیه قیمت‌های آن فضای نمونه است.

61) مبلغ صد میلیون افغانی برای شهر A و B مصرف شده استو طوری که 60% برای شهر A و 40% برای شهر B به مصرف رسیده است. برای شهر A کدام یک از گراف‌های زیر دایروی مصرف سرمایه را به درجه نشان می‌دهد.

.1


.2


.3


.4


62) در فورمول $f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$ ، s انحراف معیاری، $\bar{x}$ اوسط و x مقادیر متحول تصادفی پیوسته هستند، $f(x)$ چه را نشان می‌دهد؟

1. ار تفاع منحنی را نشان می‌دهد
2. یک مقدار نامعلوم است.
3. ارتفاع و عرض منحنی را نشان می‌دهد.
4. هر سه جواب درست است.

63) ضریب خمیدگی پیرسون به صورت زیر تعریف می‌گردد:

1. $Sk(p) = \frac{3(\bar{x}. - med)}{S}$
2. $Sk(p) = \frac{4(\bar{x}. - med)}{S}$ پ
3. $Sk(p) = \frac{3(\bar{x}. - med)^2}{S}$
4. هر سه جواب این سوال درست است

64) اگر مرکز دسته را به عنوان مختصه اول و کثرت مربوط به این دسته را به عنوان مختصه دوم در نظر بگیریم نقاط به دست می‌آید، از وصل این نقاط کدام نوع گراف بدست می‌آید؟

1. گراف میله‌ای 2. گراف دایره‌ای 3. گراف مستطیلی 4. گراف چند ضلعی کثرت

65) اگر بخواهیم وزن نوزادان را بررسی کنیم از چه روشی بهتر است اطلاعات را جمع‌آوری کنیم؟

1. باید وزن نوزادان را اندازه‌گیری نماییم.
2. باید از تاریخ تولد نوزادان استفاده کنیم.
3. وزن نوزادان را از مادران پرسان کنیم.
4. تمام روش‌های فوق درست است.

66) طریقه‌های جمع‌آوری اطلاعات عبارتند از:

1. پرسان کردن 2. مشاهده 3. هر سه جواب درست است 4. انجام تجربه و معلومات تحریری

67) اگر S فضای نمونه، A حادثه اتفاقی و A' مکمله حادثه A باشد، کدام جواب زیر درست است؟

1. $P(A \cup A') = 1$ 2. $P(A \cup A') = 0$ 3. $P(A \cup A') = 0.5$ 4. هرسه درست است.

68) توسط رابطه $Z=\frac{c-\mu}{\delta}$ می‌توان هر مجموعه احصائیوی را که دارای توزیع نورمال باشد:

1. به توزیع نورمال غیرمعیاری تبدیل کنیم.
2. به توزیع نورمال ستندرد تبدیل کنیم.
2. به توزیع پواسن تبدیل کنی.
4. به توزیع دو جمله‌ای تبدیل کنیم.

69) در جدول زیر وسط دسته‌ها و طول دسته‌ها به ترتیب عبارتند از:

وسط دسته	طول دسته	دسته	داده‌های هر دسته
		$16-18$	$16,16.5,17,15.5$
		$18-20$	$18,18.5,19.5,20$

1. $2,2-19,17$
2. $3,3-18,20$
3. $2,3-20,17$
4. $3,3,-18,20$

70) در جدول زیر کثرت مطلق تعداد شاگردان یک صنف نظر به حرف اول نام‌شان جابجا شده است. کثرت تراکمی نسبی حروف داده شده عبارت است از:

1. $\frac{10}{103}$
2. 100%
3. $\frac{123}{103}$
4. $\frac{23}{103}$

71) در جدول زیر ستون دارای شش و سه (حجره حاوی 3 و 6) نشان می‌دهد که:

تعداد اعضای خانواده	1	2	3	4	5	6	7	8	مجموعه
تعداد خانواده	5	7	9	8	5	3	2	1	40

1. تعداد سه خانواده، هر خانواده شش عضو دارد.
2. تعداد شش خانواده هر خانواده سه نفر عضو دارد.
3. تعداد هشت خانواده هر خانواده سه نفر عضو دارد.
4. تعداد سه خانواده هر خانواده هشت نفر عضو دارد.

72) اگر احتمال را به وسیله فورمول پواسن و فورمول دوجمله‌یی محاسبه و یا با هم مقایسه کنیم، کدام یک آن ساده‌تر است؟

1. محسابه به وسیله فورمول دو جمله‌یی ساده‌تر خواهد بود.
2. محاسبه به وسیله فورمول پواسن ساده‌تر خواهد بود.
3. محاسبه به وسیله‌ی هر دو فورمول کاملا یکسان خواهد بود.
4. هر سه جواب درست است.

73) دو گروپ دیتا $A:1,2,3,10$ و $B:1,1,1,13$ داده شده اند:

1. دارای اوسطهای متفاوت بوده و پراگندگی A نسبه به A کمتر است.
2. دارای اوسطهای متفاوت بوده و پراگندگی B نسبت به A کمتر است.
3. دارای اوسطهای مساوی بوده و پراگندگی B نسبت به A کمتر است.
4. دارای اوسطهای مساوی بوده و پراگندگی A نسبت به B بیشتر است.

74) 12 تن از بچه‌ها و 6 تن از دختران یک مکتب از طریق قرعه‌کشی می‌خواهند یک تن را بحیث نماینده خود تعیین نماید، احتمال این که نماینده دختر باشد عبارت است از:

.1 $\frac{1}{3}$ .2 $\frac{2}{3}$ .3 $\frac{1}{2}$ .4 1

75) اگر x متحول تصادفی گسسته باشد، در اینصورت واریانس x که به شکل S^2 نمایش داده می‌شود، عبارت است از:

.1 $S^2 = \sum_{i=1}^{n}[x - E(x_i)^2 f(x_i)$ .2 $S^2 = \sum_{i=1}^{n}[x + E(x_i)^2 f(x_i)$

.3 $S^2 = \sum_{i=1}^{n-1}[x - E(x_i)^2 f(x_i)$ .4 $S^2 = \sum_{i=1}^{n+1}[x + E(x_i)^2 f(x_i)$

76) بیشترین مقداری که می‌تواند در یک دسته قرار گیرد عبارت است از:

.1 سرحد پایینی دسته .2 سرحد بالای دسته .3 هر دو جواب درست است. .4 هر دو جواب غلط است.

77) آیا گرفتن گلوله از یک جعبه که در آن سه گلوله با رنگ سبز قرار دارد، می‌تواند یک تجربه تصادفی باشد؟

.1 بله .2 نخیر

.2 می‌تواند هم تصادفی و هم غیر تصادفی باشد. .4 هر سه جواب درست است.

78) اگر متحول‌های تصادفی یک جامعه به صورت $1,2,3$ و تابع احتمال $f(x)\frac{1}{3}$ باشد، در این صورت اوسط جامعه عبارت است از:

.1 $\mu = E(x) = 1$ .2 $\mu = E(x) = 0$ .3 $\mu = E(x) = 2$ .4 $\mu = E(x) = 1.5$

79) فرق بین متحول تصادفی در احصائیه و احتمالات با متحول الجبر در این است که:

.1 متحول احصائیه و احتمال اعداد حقیقی و متحول الجبر از فضای نمونه انتخاب می‌شود.

.2 متحول احصائیه و احتمال از فضای نمونه و متحول الجبر از اعداد حقیقی انتخاب می‌شود.

.3 هر دو جواب درست است.

.4 هر دو جواب غلط است.

80) اگر دیتا دسته‌بندی با مرکز دسته‌های $x_{1,} \cdots, x_n$ و با کثرت‌های $f_1, f_2, \cdots, f_n$ داده شده باشد. واریانس به کمک کدام فورمول زیر محاسبه می‌شود.

.1 $S^2 = \frac{\sum_{i=2}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n^2}$ .2 $S^2 = \frac{\sum_{i=2}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$

.2 $S^2 = \frac{\sum_{f_1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n^2}$ .4 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

81) در جدول زیر واریانس را محاسبه کنید.

x_i	2.5	3.5	4.5
y_i	16	25	35

1. $S^2 = 2.5$ 2. $S^2 = 0.60$ 3. $S^2 = 0.50$ 4. $S^2 = 0.30$

82) ضریب تغییرات:

1. فقط برای دیتای مثبت تعریف می‌شود.
2. هم برای دیتای مثبت و هم برای دیتای منفی تعریف می‌شود.
3. هر سه جواب درست است.
4. برای دیتای منفی تعریف می‌شود.

83) کمیت نمونه را .... نمونه می‌نامند.

1. پارامتر 2. اوسط 3. هر دو 4. آماره

84) هرگاه کثرت دیتاها دوبرابر شود، در زاویه مرکزی گراف دایروی چه تغییراتی می‌آید؟

1. در زاویه مرکزی تغییرات کم می‌آید.
2. هیچ تغییراتی نیامده و زاویه مرکزی ثابت باقی می‌ماند.
3. زاویه مرکزی بزرگ می‌شود.
4. زاویه مرکزی کوچک می‌شود.

85) هرگاه جدول زیر داده شده باشد و بخواهیم که توسط گراف در معرض دید دیگران بگذاریم باید:

کثرت شفاخانه‌ها	تعداد مریضان
4	$140-149$
7	$150-159$
11	$160-169$
8	$170-179$

1. از گراف دایروی استفاده می‌کنیم.
2. از گراف مستطیلی استفاده می‌کنیم.
3. از گراف میله‌ی استفاده می‌کنیم.
4. از گراف خط منکسر استفاده می‌کنیم.

مأخذ

- اصیل، دوکتور مراد علی (مبادی تیوری های عمومی احصائیه و تطبیق آن ها در اقتصاد)
- آرین، حمیدالله (ریاضیات اساس یک، 1392)
- باغبادرانی، عفت فتحی(انواع احتمالات)
- پاینده، عزیزالله (احتمالات، 1395)
- حمیدی، عبدالباقی (احتمالات، 1394)
- علوی (آمار و احتمالات)
- کتب ریاضی صنوف هفتم، هشتم، نهم، یازدهم و دوازدهم مکتب(1391)
- j. Bernoulli. Ars Conjectandi. Basel, 1713
- Wikipedia contributors, "Pearson product-moment correlation coefficient," Wikipedia, The Free Encyclopedia, (accessed February 14, 2014)